

آزمون مرحله‌ی اول سومین دوره مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. توابع زیر مفروضند:

$$f(x) = \frac{1}{\lfloor |x| \rfloor - 1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{\lceil |x| \rceil - 1}$$

اولاً قلمرو هریک از توابع فوق را به دست آورید. ثانیاً ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$$

۲. تابع زیر مفروض است:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \lfloor x \rfloor\right)$$

اولاً دوره تناوب آن را تعیین کنید و نمودار آن را در یک دوره تناوب رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید که
حدهای یکطرفی (چپ و راست) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x)$ هر دو موجودند، ولی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نیست (با روش
 ϵ و δ با استفاده از تعریف حد).

۳. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان تعریف شده است که به ازای هر x و y از \mathbb{R} رابطه زیر برقرار است.

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

اگر $f(0) \neq 0$ و $f'(0)$ موجود و متناهی [متخالف بینهایت] باشد، ثابت کنید f در هر نقطه دارای مشتق
است.

۴. تعیین کنید بسط $(a+b+c)^{99}$ در حالت کلی چند جمله می‌تواند داشته باشد.

۵. اگر داشته باشیم

$$S_n = \frac{5}{9} \times \frac{14}{20} \times \frac{27}{35} \times \dots \times \frac{2n^2 - n - 1}{2n^2 + n - 1}$$

مطلوب است تعیین حد S_n ، وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند.

آزمون مرحله‌ی اول سومین المپیاد ریاضی کشور

۶. دو خط D و D' به معادله‌های

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$$

مفروضند. طول عمود مشترک این دو خط را محاسبه کنید.

۷. دو نقطه ثابت B و C در صفحه P مفروضند مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحه P را به دست آورید به طوری که داشته باشیم $MB^2 + kMC^2 = a^2$ (a و k دو عدد معلومند و $k > 0$).

۸. عمل دوتایی \oplus در مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \oplus y = x + y - xy$$

که در آن اعمال سمت راست، جمع، تفریق و ضرب معمولی‌اند. اولاً ثابت کنید \oplus در \mathbb{R} شرکتپذیر است؛ ثانیاً عضو بی‌اثر در این عمل را تعیین کنید.