حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین دوره مسابقات ریاضی

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اثبات با استقرا روی n. برای پایهٔ استقرا داریم

$$n = 1 \Longrightarrow q\cos\alpha = q\frac{p}{q} = p$$

حکم را برای اعداد کمتر یا مساوی n می‌پذیریم و در مورد $n+1$ ثابت می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\alpha &= \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha \\ &= \cos n\alpha\cos\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(\cos(n+1)\alpha - \cos(n-1)\alpha\big)\end{aligned}$$

از آنجا

$$\cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha$$

در نتیجه

$$q^{n+1}\cos(n+1)\alpha = 2(q^n\cos n\alpha)(q\cos\alpha) - q^2(q^{n-1}\cos(n-1)\alpha)$$

بنابر فرض، $q^n\cos n\alpha$، $q\cos\alpha$ و $q^{n-1}\cos(n-1)\alpha$ اعداد صحیحند، در نتیجه $q^{n+1}\cos(n+1)\alpha$ عددی صحیح بوده و به حکم استقرا برقرار است.

۲.

$$x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx \Longrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$$

نتیجه اینکه $x=y=z$.
از آنجا

$$p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

۳.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\leqslant g(x)$$

چون f صعودی است،

$$f\big(f(x)\big) \leqslant f\big(g(x)\big) \qquad (۱)$$

همچنین با توجه به فرض داریم

$$f\big(g(x)\big) \leqslant g\big(g(x)\big) \qquad (۲)$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$f\big(f(x)\big) \leqslant g\big(g(x)\big)$$

و به همین ترتیب قسمت دوم نامساوی نیز حاصل می‌شود. پس

$$f\big(f(x)\big) \leqslant g\big(g(x)\big) \leqslant \varphi\big(\varphi(x)\big)$$

۴. اگر x صحیح باشد، داریم

$$\lfloor x \rfloor = x,\ \lfloor x+y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor\ \lfloor -x \rfloor = -x,\ \lfloor -x-y \rfloor = -x + \lfloor -y \rfloor$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$$

و به همین ترتیب، داریم

$$\lfloor -x \rfloor + \lfloor -y \rfloor = -x + \lfloor -y \rfloor = \lfloor -x-y \rfloor$$

حال اگر تساویهای فوق هر دو برقرار باشند، ثابت می‌کنیم باید حداقل یکی از دو مقدار x و y صحیح باشد؛ زیرا اگر x و y هیچ‌کدام صحیح نباشند خواهیم داشت

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -۱ \quad , \quad \lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor = -۱$$
$$\lfloor x+y \rfloor + \lfloor -x-y \rfloor = \{۰ \text{ یا } -۱\}$$

و در نتیجه با جمع دو تساوی $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$ و $\lfloor -x \rfloor + \lfloor -y \rfloor = \lfloor -x-y \rfloor$ خواهیم داشت

$$-۲ = \{۰ \text{ یا } -۱\}$$

که امکانپذیر نیست. از این تناقض حکم نتیجه می‌شود.

۵. بنا بر تعریف مشتق f،

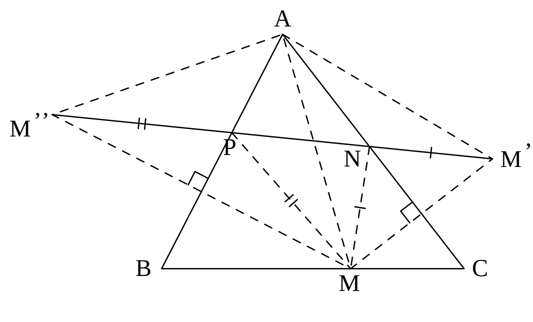
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x)\big(f(h)-۱\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(x)\big(۱+hg(h)-۱\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{hf(x)g(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} f(x)g(h) \\ &= f(x)\lim_{h\to ۰} g(h) \\ &= f(x)\cdot ۱ = f(x) \end{aligned}$$

۶. اگر نقطهٔ دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم، از بین مثلثهایی به رأس M که دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث باشند، محیط مثلثی مینیمم است که به شرح زیر حاصل شود.

قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به اضلاع ACو AB، به ترتیب M'و M'' می‌نامیم؛ خط $M'M''$ دو ضلع ACو AB را به ترتیب در نقاط Nو P قطع می‌کند. مثلث MNP، با محیط $M'M''$، جواب این قسمت از مسأله است. (چرا؟)

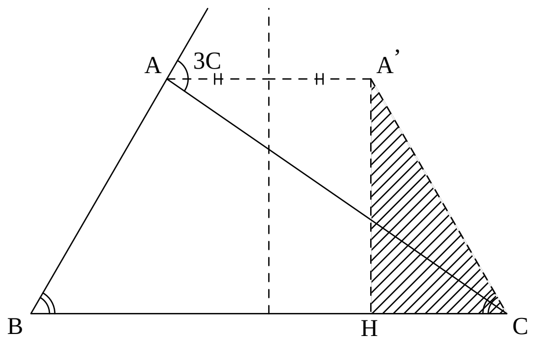
اما مثلث $AM'M''$ متساوی‌الساقین به زاویهٔ رأس $\angle M'AM'' = ۲\angle A$ است.

حال مسأله به تعیین نقطهٔ M به طوری که قاعدهٔ مثلث حاصل ($M'M''$) مینیمم شود، تبدیل می‌شود. چون مثلثهای حاصل ($AM'M''$) متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $۲\angle A$ هستند، پس قاعده $M'M''$ در مثلثی مینیمم است که ساق آن مینیمم باشد (چرا؟)، و این در حالتی است که $AM = AM' = AM''$ مینیمم باشد، یعنی M پای ارتفاع از رأس A باشد. با تعویض M با نقاطی روی اضلاع ACو AB، نتیجه می‌گیریم که مثلث مورد نظر همان مثلث ارتفاعی محاط در مثلث ABC است.



۷. **روش اول.** فرض کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مطلوب است. اگر قرینهٔ A را نسبت به عمودمنصف BC، A' بنامیم مثلث $AA'C$ متساوی‌الساقین است (چرا؟). اما ذوزنقهٔ $AA'CB$

متساوی‌الساقین است، از آنجا $AB = AA' = A'C$.



حال اگر از نقطهٔ A' عمود $A'H$ را بر BC رسم کنیم، مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'HC$ قابل رسم است زیرا اگر $A'C = x$ فرض شود، داریم $A'H = h$ و $BC = a$ (a و h معلومند) پس

$$HC = \frac{a - x}{۲}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'HC$ می‌توان نوشت

$$x^{۲} = h^{۲} + \frac{(a - x)^{۲}}{۴}$$

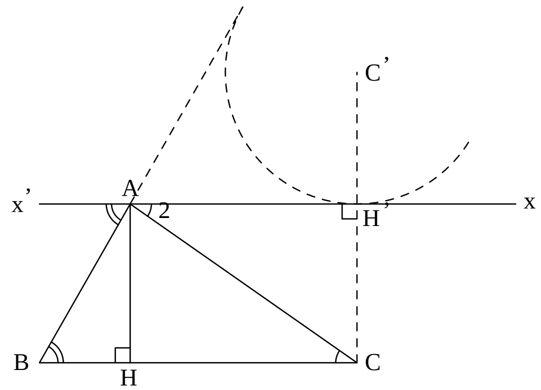
یا

$$۳x^{۲} + ۲ax - ۴h^{۲} - a^{۲} = ۰$$

چون طولهای a و h معلومند، $a^{۲}$ و $h^{۲}$ قابل رسمند؛ از آنجا ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم قابل ترسیمند (مجموع و حاصلضرب آنها معلومند)؛ با تعیین x و رسم مثلث $A'HC$، CH را به اندازه a امتداد می‌دهیم. به مرکز B و شعاع $A'C$ دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ محل تلاقی این دایره با خطی که موازی CB و به فاصلهٔ h از آن، رسم می‌شود نقطهٔ A را به‌دست می‌دهد.

روش دوم. اگر از نقطه A خط $x'x$ را به موازات BC رسم کنیم بنابر خاصیت توازی، زاویه $\angle x'AB$ دو برابر زاویه $\angle xAC$ است (زیرا $\angle B = ۲\angle C$). چون ارتفاع AH معلوم است، پس خط $x'x$ معلوم است، و مسأله به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود.

دو نقطهٔ B و C و خط $x'x$ مفروض است. نقطهٔ A را بر خط $x'x$ چنان بیابید که $\angle A_۳ = ۲\angle A_۲$. (یا $\angle x'AB = ۲\angle xAC$).



برای حل مسألهٔ اخیر، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط $x'x$ را C' و محلّ تقی CC' با xx' را H' می‌نامیم. به مرکز C' و شعاع $C'H'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ B مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم. محل تلاقی خطّ مماس، با خط $x'x$ نقطهٔ A است (چرا؟).

۸. ابتدا تقاطع صفحه و سطح مخروطی را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۴x^۲ - y^۲ + ۳z^۲ = ۰ \\ ۲x + y - z = ۰ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} ۴x^۲ - y^۲ + ۳(۲x + y)^۲ = ۰ \\ ۲x + y - z = ۰ \end{cases}$$

از طرفی،

$$۴x^۲ - y^۲ + ۳(۲x + y)^۲ = ۲(۲x + y)(۴x + y) = ۰$$

بنابراین، از این رابطه و دستگاه فوق نتیجه می‌شود که صفحهٔ $۲x + y - z = ۰$ سطح مخروطی را در دو صفحهٔ $۲x + y = ۰$ و $۴x + y = ۰$ قطع می‌کند. بنابراین، فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی، دو خط d و d'، به معادلات زیر است.

$$d\left|\begin{array}{l} ۲x + y = ۰ \\ ۲x + y - z = ۰ \end{array}\right. \qquad d'\left|\begin{array}{l} ۴x + y = ۰ \\ ۲x + y - z = ۰ \end{array}\right.$$

اینک پارامترهای هادی دو خط d و d' را تعیین می‌کنیم. پارامتر هادی خط d، $(-۱,۲,۰)$، و پارامتر هادی خط d'، $(-۱,۴,۲)$ است. زاویهٔ بین این دو خط را α می‌نامیم و چنین محاسبه می‌شود:

$$\cos\alpha = \frac{۱ + ۸}{\sqrt{۵}\sqrt{۲۱}} = \frac{۳\sqrt{۱۰۵}}{۳۵}$$

۹. **روش اول.** فرض کنیم که x و y دو عضو G_a باشند. بنابراین، m و n در $\mathbb{Z}$ وجود دارند به طوری که

$$x = a^n,\ y = a^m$$

پس

$$xy = a^n a^m = a^{n+m}$$

چون $n+m$ عضو $\mathbb{Z}$ است، پس $xy \in G_a$، بنابراین، G_a نسبت به عمل ضرب (عمل گروه) بسته است. از طرف دیگر $e = a^{۰}$ عضو همانی G_a است زیرا به‌ازای هر $x \in G_a$ داریم

$$xe = a^n a^{۰} = a^{n+۰} = a^n = x$$
$$ex = a^{۰} a^n = a^{۰+n} = a^n = x$$

همچنین وارون هر عضو $x = a^n$ در G_a عبارت است از $y = a^{-n}$ که متعلق به G_a است زیرا $-n \in \mathbb{Z}$ و

$$xy = a^n a^{-n} = a^{۰} = e$$
$$yx = a^{-n} a^n = a^{۰} = e$$

بالاخره اگر $x = a^n$، $y = a^m$ و $z = a^t$ اعضایی در G_a باشند آنگاه

$$x(yz) = a^n(a^m a^t) = a^n a^{m+t} = a^{n+m+t}$$
$$(xy)z = (a^n a^m)a^t = a^{n+m} a^t = a^{n+m+t}$$

و عمل ضرب در G_a شرکت‌پذیر بوده و در نتیجه G_a زیرگروه G است.

روش دوم. برای اثبات زیرگروه بودن G_a از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

شرط لازم و کافی برای اینکه زیر مجموعهٔ ناتهی G_a از G، یک زیرگروه G باشد آن است که به‌ازای هر x و y از G_a،

$$xy^{-۱} \in G_a$$

بدیهی است که $G_a \neq \varnothing$. زیرا $e \in G_a$. فرض کنیم x و y عضوهایی از G_a باشد. بنابراین، m و n در $\mathbb{Z}$ وجود دارند به طوری که

$$y = a^m,\ x = a^n$$

اینک،

$$xy^{-۱} = a^n(a^m)^{-۱} = a^n a^{-m} = a^{n-m}$$

بنابراین، $xy^{-۱} \in G_a$. در نتیجه، G_a زیرگروه G است.

۱۰. الف) در حالت کلی پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم و احتمال هریک را می‌نویسیم.

پیشامد A: گلوله به هدف بخورد	$P(A) = p$
پیشامد B: گلوله به هدف نخورد	$P(B) = q$

پیشامدهای فرعی عبارتند از

A:	پرتاب اول به هدف بخورد	احتمال p
BA:	پرتاب دوم به هدف بخورد	احتمال qp
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underbrace{BB\cdots B}_{n-۱\text{بار}}A$:	پرتاب nام به هدف بخورد	احتمال $q^{n-۱}p$

در نتیجه،

$$P(\text{در پرتاب } n \text{ام به هدف بزنیم}) = q^{n-۱}p$$

پس احتمال آنکه دقیقاً سه گلوله مصرف شود برابر $q^۲p$ یعنی

$$\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۲ \times \left(\frac{۹}{۱۰}\right) = \frac{۹}{۱۰۰۰}$$

است.

ب) این پیشامد اجتماع پیشامدهای متمایزِ «سه گلوله مصرف شود»، «چهار گلوله مصرف شود» و ...
است و با نمادگذاری فوق می‌شود

$$BBA \cup BBBA \cup \cdots \cup BB\cdots BA \cup \cdots$$

پس احتمال این پیشامد برابر جمع احتمالهای متمایز فوق است.

$$\begin{aligned} P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) & \\ &= P(BBA) + P(BBBA) + \cdots \\ &= P(B)P(B)P(A) + P(B)P(B)P(B)P(A) + \cdots \\ &= q^۲p(۱ + q + q^۲ + \cdots) \\ &= q^۲p \times \frac{۱}{۱-q} = q^۲ \end{aligned}$$

و با جایگذاری مقدار عددی،

$$P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) = \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰۰}$$

نکته. در قسمت (ب)، پیشامد مورد نظر را می‌توان بر حسب مکمل پیشامد تعریف کرد.

$$P(\text{سه گلوله مصرف شود}) = ۱ - P(\text{یک یا دو گلوله مصرف شود})$$

و چون مصرف یک گلوله و مصرف دو گلوله پیشامدهای متمایزند،

$$P(\text{یک یا دو گلوله مصرف شود}) = P(\text{یک گلوله مصرف شود}) + P(\text{دو گلوله مصرف شود})$$

با جایگذاری مقادیر عددی

$$\begin{aligned} P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) &= ۱ - (p + qp) \\ &= ۱ - p(۱ + q) \\ &= ۱ - \frac{۹۰}{۱۰۰}\left(۱ + \frac{۱}{۱۰}\right) \\ &= ۱ - \frac{۹۹}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰۰} \end{aligned}$$

۱۱. **روش اول.** فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$؛ داریم

$$\begin{aligned} (x+x)^{۲} &= x+x \\ (x+x)(x+x) &= x+x \\ x^{۲}+x^{۲}+x^{۲}+x^{۲} &= x+x \\ x+x+x+x &= x+x \\ x+x &= ۰ \\ x &= -x \end{aligned}$$

بنابراین، قرینهٔ هر عضو با خودش برابر است.
حال فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}$؛ چون $x+y \in \mathbb{R}$، داریم

$$\begin{aligned} (x+y)^{۲} &= x+y \\ (x+y)(x+y) &= x+y \\ x^{۲}+xy+yx+y^{۲} &= x+y \\ x+xy+yx+y &= x+y \\ xy+yx &= ۰ \end{aligned}$$

چون $y=-y$ پس $xy-yx=۰$. از آنجا $xy=yx$ و حلقه، جابجایی است.
روش دوم. از $a(-b)=(-a)b=-ab$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$x = x^{۲} = (-x)(-x) = (-x)^{۲} = -x$$

پس هر عضو با قرینه‌اش برابر است. بنابراین،

$$\begin{aligned} (x+y)(x-y) = (x-y)^{۲} &= x-y \\ x^{۲}+x(-y)+yx+y(-y) &= x-y \\ x-xy+yx-y &= x-y \\ xy &= yx \end{aligned}$$

۱۲. فرض کنیم $a<b$، چون $c>۰$، پس $ac<bc$. به طرفین نامساوی مقادیر مساوی ab را می‌افزاییم

$$\begin{aligned} ab+ac &< ab+bc \\ a(b+c) &< b(a+c) \end{aligned}$$

چون $b+c>۰$، پس

$$a < \frac{b(a+c)}{b+c}$$

و چون $b>۰$،

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \qquad (۱)$$

حالت $a>b$ نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. حال داریم

$$a<b \Longrightarrow a+c<b+c \Longrightarrow \frac{a+c}{b+c}<۱$$

و با توجه به نامساوی (۱) داریم

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}<۱$$

برای قسمت آخر مسأله، با فرض $a<b$ داریم $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}<۱$، با انتخاب c به عنوان عددی گنگ، ثابت می‌کنیم $x=\left(\frac{a+c}{b+c}\right)b$، عددی گنگ خواهد بود. از آنجا $a<x<b$ جواب مطلوب ماست.

حال فرض کنیم c عددی گنگ بوده ولی $\left(\frac{a+c}{b+c}\right)b$ گنگ نباشد پس

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+c}{b+c}\right)b &= \frac{p}{q} \quad (p,q\in\mathbb{Z})\\
(a+c)bq &= p(b+c)\\
abq+cbq &= bp+pc\\
c &= \frac{b(aq-p)}{p-bq}
\end{aligned}$$

چون

$$a<b \Longrightarrow \frac{a+c}{b+c}\neq ۱ \Longrightarrow p\neq bq$$

و a، b، p و q اعداد صحیحند، c عددی گویاست که متناقض فرض گنگ بودن آن است. از این تناقض نتیجه می‌شود که اگر c گنگ باشد، $\frac{a+c}{b+c}$ نیز گنگ است و حکم خواسته شده برقرار است.