

آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

آنالیز و ریاضی جدید

۱. حد تابع f با ضابطه

$$f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 1) \sin \frac{1}{x-1}}{\sin \pi x}$$

را در نقطه $x_0 = 1$ تعیین کنید.

۲. الف) نمودار تابع f با ضابطه

$$f(x) = 4x(1 - |x|), \quad |x| \leq 1$$

را رسم کنید.

ب) آیا تابع f در نقطه $x = 0$ مشتق دارد؟

ج) آیا تابع

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 4 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

د) نمودار تابع فوق را رسم کنید.

۳. کوچکترین عدد درست [صحیح] مثبتی را تعیین کنید که چون آخرین رقم سمت راست آن به سمت چپ برده شود عدد حاصل $\frac{3}{4}$ عدد قبلی باشد.

۴. اگر مجموعه S شامل تمام ماتریسهای حقیقی $n \times n$ باشد، به طوری که مجموع هریک از سطرهاى آنها برابر ۱ شود، یعنی

$$S = \left\{ [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \wedge \forall i, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \right\}$$

آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی کشور

الف) ثابت کنید S نسبت به عمل ضرب ماتریسها بسته است.

ب) آیا S عضو بی‌اثر دارد؟

ج) آیا همه عناصر S معکوسپذیرند؟

۵. تعیین کنید به ازای چه مقادیری از عدد طبیعی n عبارت زیر مجذور کامل است؟

$$1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

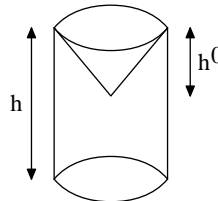
۶. پنج خودنویس، چهار مداد، دو دفترچه و سه خودکار را می‌خواهیم بین دو نفر طوری تقسیم کنیم که به هریک حداقل یکی از نوشت‌افزارهای فوق تعلق گیرد. مطلوب است تعداد حالات ممکن این تقسیم. (اشیاء غیر متمایز هستند).

هندسه و مثلثات

۱. در یک صفحه نقطه O' را به دلخواه روی محور Ox در نظر می‌گیریم. نقطه دلخواه M را یک بار حول نقطه O به اندازه 90° در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطه M' به دست آید. بار دوم نقطه M را حول نقطه O' به اندازه 90° در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطه M'' به دست آید. ثابت کنید نقطه P ، وسط $M'M''$ ، نقطه‌ای ثابت است.

۲. دوزنقه $ABCD$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم امتداد ساقهای AB و DC در M و قطرهای AC و BD در N متقاطع باشند. اگر طول قاعده‌های AD و BC را به ترتیب مساوی a و b قرار دهیم نسبت مساحت مثلثهای AMD و AND را بر حسب a و b محاسبه کنید.

۳. مرکب‌دان استوانه‌ای شکلی دارای یک مجرای مخروطی است به طوری که رأس مخروط بر سطح مرکب مماس است. مطلوب است تعیین نسبت ارتفاع مخروط به ارتفاع مرکب‌دان، برای آنکه هرگاه مرکب‌دان واژگون شود، مرکب آن نریزد.



۴. مطلوب است اثبات هندسی تساوی

$$\operatorname{Arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{Arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$