حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

آنالیز و ریاضی جدید

۱. تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}}{\sin \pi x} \\ &= \frac{x-1}{\sin \pi x}\left((x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $h(x) = (x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sin \pi x}$، داریم

$$f(x) = g(x)h(x)$$

اما با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin \pi x} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi\cos \pi x} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

در ضمن، ثابت می‌کنیم که $\lim\limits_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$. باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ را طوری پیدا کرد که

$$0 < |t| < \delta \Longrightarrow \left|t\sin\frac{1}{t}\right| < \varepsilon \tag{1}$$

اما $|\sin\frac{1}{t}| \leqslant 1$. بنابراین،

$$\left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |t|$$

پس اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ قرار دهیم $\varepsilon = \delta$ آنگاه (۱) به وضوح درست خواهد بود. بنابراین،

$$\lim_{x\to ۱} h(x) = \lim_{x\to ۱} (x-۱)\sin\frac{۱}{x-۱} = ۰$$

و در نتیجه،

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} g(x) \times \lim_{x\to ۱} h(x) = \frac{-۱}{\pi} \times ۰ = ۰$$

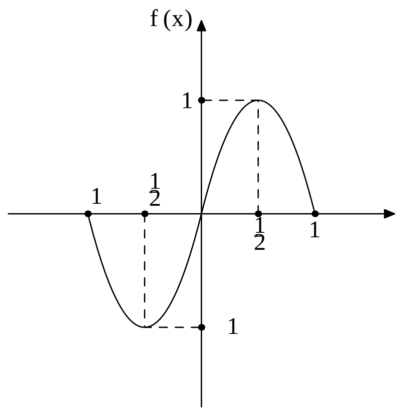
۲. الف)

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۰ \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = ۴x + ۴x^۲ \Longrightarrow f'(x) = ۴ + ۸x \Longrightarrow f'\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = ۴ + ۴x \end{cases}$$

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱ \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = ۴x - ۴x^۲ \Longrightarrow f'(x) = ۴ - ۸x \Longrightarrow f'\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = ۴ - ۴x \end{cases}$$



ب)

مشتق چپ f در صفر $= ۴ + ۸ \times ۰ = ۴ = ۴ - ۸ \times ۰ =$ مشتق راست f در صفر

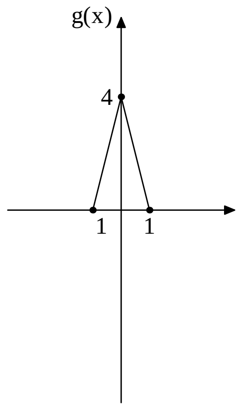
پس f در صفر مشتق دارد.

ج)

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} ۴(۱ - |x|) = ۴ = g(۰)$$

پس g در صفر پیوسته است.

د)



۳. می‌گیریم $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$. داریم

$$\overline{a_0 a_k \cdots a_1} = \frac{3}{2} \times \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$$

m را تعریف می‌کنیم

$$m = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1}$$

پس

$$\begin{aligned}
10^k a_0 + m = \frac{3}{2} \times (10m + a_0) = 15m + \frac{3a_0}{2} \\
&\Longrightarrow 10^k a_0 \times 2 + 2m = 30m + 3a_0 \\
&\Longrightarrow 28m = (10^k \times 2 - 3)a_0 \\
&\Longrightarrow 0 \equiv \pm a_0 \Longrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod 4 \\
&\Longrightarrow a_0 = \{\text{۰ یا ۴ یا ۸}\}
\end{aligned}$$

اما $m > 0$، پس $a_0 \neq 0$ و $a_0 = \{\text{۴ یا ۸}\}$.

$$\begin{aligned}
10^k \times 2 - 3 \equiv 28m \equiv 0 &\Longrightarrow 3 \equiv 3^k \times 2 \\
&\Longrightarrow 1 \equiv 3^{k-1} \times 2 \\
&\Longrightarrow -3 \equiv 3^{k-1} \\
&\Longrightarrow -1 \equiv 3^{k-2} \pmod 7
\end{aligned}$$

پس

$$\min(k-2) = 3 \Longrightarrow \min(k) = 5$$

و

$$\begin{aligned}
\min(n) &= \min(۱۰m + a_۰) \\
&= ۱۰\min(m) + \min(a_۰) \\
&= ۱۰\min\Big(\frac{۱۰^k \times ۲ - ۳}{۲۸}\Big)a_۰ + ۴ \\
&= ۱۰ \times \Big(\frac{۱۰^۵ \times ۲ - ۳}{۲۸}\Big) \times ۴ + ۴ = ۲۸۵۷۱۴
\end{aligned}$$

پس حداقل n با این شرایط، عبارتست از ۲۸۵۷۱۴.

۴. الف) می‌گیریم

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n\times n}$$

حالا از $A, B \in S$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\text{مجموع درایه‌های سطر } i \text{ از } A\times B &= \sum_{j=۱}^{n}\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\times b_{kj}\Big) \\
&= \sum_{k=۱}^{n}\Big(\sum_{j=۱}^{n} a_{ik}\times b_{kj}\Big) \\
&= \sum_{k=۱}^{n}\Big(a_{ik}\sum_{j=۱}^{n} b_{kj}\Big) \\
&= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\times ۱ \\
&= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} = ۱
\end{aligned}$$

پس $A\times B$ نیز در S است.

ب) بله. $I_{n\times n}$، یعنی ماتریس واحد $n\times n$.

$$\begin{bmatrix}
۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\
۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\
۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱
\end{bmatrix}$$

ج) خیر. کافی است یکی از سطرهای ماتریس A دوبار ظاهر شود تا دترمینان آن صفر شود و A عضو معکوس نداشته باشد.

۵. اگر $n \leqslant ۴$ باشد، وقتی که $n = ۱$ یا $n = ۳$ است، این عبارت مجذور کامل می‌شود و در حالتی که $n > ۴$ باشد،

$$\begin{aligned}
۱! + ۲! + ۳! + ۴! + \cdots + n! &\equiv ۱! + ۲! + ۳! + ۴! \\
&\equiv ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ \equiv ۳ \pmod{۵}
\end{aligned}$$

ولی هیچ مجذوری به پیمانهٔ ۵ همنهشت ۳ نیست، پس تنها $n = ۱$ و $n = ۳$ جوابهای مسأله‌اند.

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

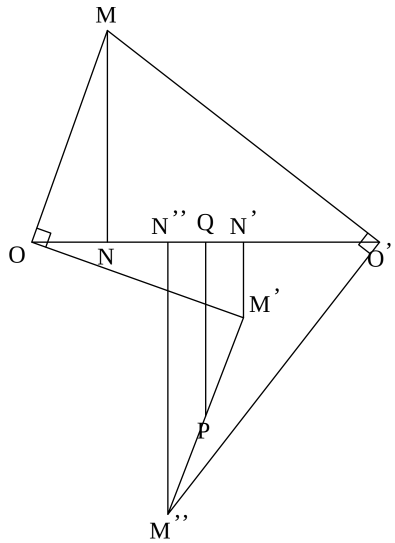
۶. برای تقسیم n چیز بین دو نفر باید ببینیم n را به چند طریق می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد نوشت. روشن است که پاسخ این پرسش $n+۱$ است. اما در دوتا از این تقسیمها، یک نفر سهمی از تقسیم ندارد ($n = n+۰ = ۰+n$). بنابراین، اگر چیزها را به ترتیب تقسیم کنیم، خودنویسها را به ۴ طریق، مدادها را به ۳ طریق، دفترچه‌ها را به ۱ طریق و خودکارها را به ۲ طریق می‌توان تقسیم کرد. بنابراین، تعداد کلِّ حالات ممکن عبارت است از

$$۴ \times ۳ \times ۱ \times ۲ = ۲۴$$

هندسه و مثلثات

۱. از P، M، M' و M'' بر OO' عمود می‌کنیم و پای ارتفاعها را Q، N، N' و N'' می‌نامیم. داریم

$$۲PQ = M'N' + M''N''$$



پس

$$\left.\begin{array}{r} OM = OM'' \\ \angle N = \angle N' = ۹۰^\circ \\ \angle OMN = \angle M'ON' = ۹۰ - \angle MON \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ONM' = \triangle OMN$$

و به همین ترتیب، $\triangle M''N''O' = \triangle O'NM$. پس

$$ON = M'N' \text{ و } MN = ON' = N''O' \text{ و } M''N'' = NO' \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۲PQ = M'N' + M''N'' = ON + NO' = OO' \\ ON' - QN' = N''O' - N''Q = \frac{۱}{۲}OO' \end{cases}$$

بنابراین، PQو OQ هر دو ثابتند و نقطهٔ P ثابت است.

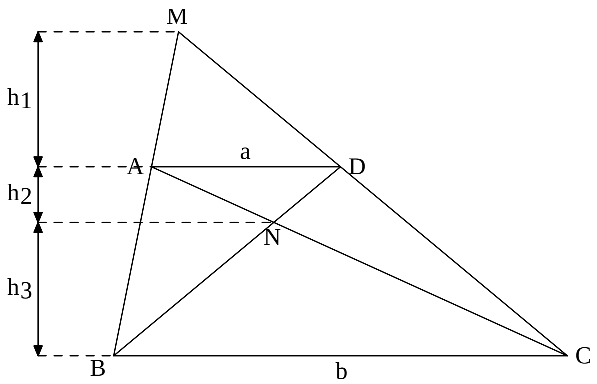
حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

۲. داریم

$$\frac{S_{AMD}}{S_{AND}} = \frac{ah_۱}{ah_۲} = \frac{h_۱}{h_۲} = x$$
$$\frac{a}{b} = \frac{h_۱}{h_۱ + h_۲ + h_۳} = \frac{\frac{h_۱}{h_۲}}{\frac{h_۱}{h_۲} + ۱ + \frac{h_۳}{h_۲}} = \frac{x}{x + ۱ + \frac{b}{a}}$$

پس

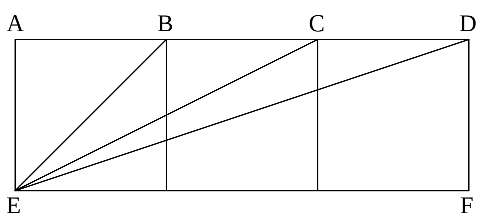
$$\frac{a}{b-a} = \frac{x}{۱ + \frac{b}{a}} \Longrightarrow x = \frac{b+a}{b-a} \quad (b > a)$$



۳. برای اینکه هرگاه مرکبدان واژگون شود، مرکب نریزد باید حجم قسمت حاوی مرکب برابر حجم بقیهٔ مرکبدان منهای حجم مخروط باشد، یعنی

$$(h - h')S = h'S - \frac{۱}{۳}h'S \Longrightarrow h - h' = \frac{۲}{۳}h'$$
$$\Longrightarrow \frac{h'}{h} = \frac{۳}{۵}$$

۴. مستطیل $ADEF$ با طول ۳ و عرض ۱ را مطابق شکل در نظر می‌گیریم.



$$FB^{۲} = ۲ = BC \cdot BD \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{FB}{BD} = \dfrac{BC}{FB} \\ \angle B = \angle B \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle BFD \sim \triangle BCF$$

پس

$$\angle BCF = \angle BFD \Longrightarrow \angle BDF + \angle BCF = \angle BDF + \angle BFD = \frac{\pi}{۴}$$

یعنی

$$\operatorname{Arctg}\frac{۱}{۲} + \operatorname{Arctg}\frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$