

آزمون مرحله‌ی اول پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث ABC میانه AM را رسم کنید و نقطهٔ وسط آن را I بنامید. پاره‌خط BI را ادامه دهید تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید

$$S_{ABC} = ۱۲S_{AID}$$

(منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC است).

۲. ثابت کنید حاصلجمع هیچ k عدد صحیح متوالی و مثبت را نمی‌توان به صورت ۲^n نوشت. (k و n اعداد صحیح و مثبت و $k \neq ۱$ است)

۳. همهٔ چندجمله‌ایهای $P(x)$ را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد.

$$xP(x-۱) = (x-۱۲)P(x)$$

۴. مثلث ABC مفروض است.

الف) ثابت کنید عدهٔ بیشماری مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به طوری که مثلث ABC در آنها محاط باشد (یعنی هریک از رئوس A ، B و C روی یکی از اضلاع مثلث ساخته شده قرار گیرد).
ب) از میان مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده مثلثی را تعیین کنید که محیط و مساحت آن ماکزیمم باشد.

۵. چندجمله‌ای ناصفر $f(x)$ را چنان تعیین کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$f(۲x) = f'(x)f''(x)$$

۶. اعداد صحیح و مثبت n ، $a_۱$ ، $a_۲$ ، \dots و a_n را طوری تعیین کنید که

$$a_۱ + a_۲ + \dots + a_n = ۱۳۶۶$$

و حاصلضرب $a_۱ a_۲ \dots a_n$ ماکزیمم باشد.