

حل مسائل آزمون مرحله‌ی اول پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

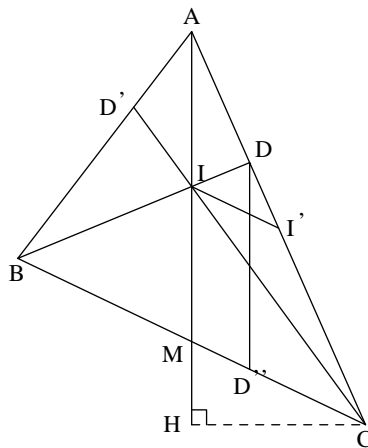
زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. مساحت مثلث AMC برابر $\frac{1}{4}$ مساحت ABC است و مساحت مثلث AIC نیز برابر $\frac{1}{4}$ مساحت AMC است (زیرا قاعده آن $AI = \frac{1}{4}AM$ ؛ و CH ارتفاع مشترک آنهاست). پس مساحت AIC برابر $\frac{1}{16}$ مساحت ABC است. حال ثابت می‌کنیم که مساحت AID برابر $\frac{1}{16}$ مساحت AIC است. این دو مثلث دارای ارتفاع مشترک هستند. بنابراین، باید ثابت کنیم $AC = 3AD$ یا $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$. برای این منظور، از I موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در I' قطع کند. چون I وسط AM است، پس $\frac{II'}{BC} = \frac{1}{4}$ یا $\frac{II'}{MC} = \frac{1}{4}$. از تشابه دو مثلث DBC و DII' داریم

$$\frac{DI}{DB} = \frac{II'}{BC} = \frac{1}{4} \implies \frac{DB}{DI} = \frac{4}{1} \implies \frac{DB}{BI} = \frac{4}{3} \quad (1)$$



از D خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا BC را در D'' قطع کند. دو مثلث AMC و $DD''C$ متشابهند،

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

پس

$$\frac{DC}{AC} = DD'' AM = \frac{DD''}{\sqrt{IM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{DD''}{IM} \quad (2)$$

اما دو مثلث BIM و BDD'' متشابهند. پس بنا بر (۱)،

$$\frac{DD''}{IM} = \frac{BD}{BI} \Rightarrow \frac{DD''}{IM} = \frac{4}{3} \quad (1)$$

بنا بر (۱) و (۲)، داریم

$$\frac{DC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

به عبارت دیگر

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC - DC}{AC} = 1 - \frac{DC}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 3AD$$

۲. فرض کنید، p ، $p+1$ ، \dots و $p+k-1$ ، k عدد صحیح مثبت و متوالی باشند و

$$p + (p+1) + \dots + (p+k-1) = 2^n$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} kp + (1 + 2 + 3 + \dots + k-1) &= 2^n \\ kp + \frac{(k-1)k}{2} &= 2^n \\ k(p+k-1) &= 2^n \end{aligned} \quad (1)$$

دو حالت را بررسی می‌کنیم.

الف) اگر k فرد باشد، $p + \frac{k-1}{2}$ عددی صحیح است و بنابراین تساوی (۱) غیر ممکن است چون 2^n عامل فردی مانند k ندارد (k بزرگتر از واحد است).

ب) اگر k زوج باشد، داریم $k = 2l$ ، پس رابطه (۱) چنین می‌شود:

$$2l \left(p + \frac{2l-1}{2} \right) = 2^n$$

یعنی

$$l(2(p+l)-1) = 2^n$$

چون $2(p+l)-1$ فرد است، پس 2^n باید دارای عامل اول فرد باشد که غیر ممکن است؛ پس حکم برقرار است.

۳. فرض کنیم $P(x) = P_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که $P(x)$ بر x بخشپذیر است. بنابراین $P_n(x) = xP_{n-1}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-1$ است. در نتیجه،

$$P_n(x-1) = (x-1)P_{n-1}(x-1)$$

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

یا

$$\begin{aligned} xP_n(x-1) &= x(x-1)P_{n-1}(x-1) \\ (x-1)P_n(x) &= x(x-1)P_{n-1}(x-1) \end{aligned}$$

بنابراین، $P_n(x)$ بر $x-1$ بخشپذیر است. پس داریم

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x(x-1)P_{n-2}(x) \\ P_n(x-1) &= (x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1) \\ xP_n(x-1) &= x(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1) \\ (x-1)P_n(x) &= x(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1) \end{aligned}$$

بنابراین $P_n(x)$ بر $x-2$ بخشپذیر است و می‌توان نوشت

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)P_{n-3}(x)$$

با ادامه دادن این روش خواهیم داشت

$$P(x) = P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-1)P_{n-12}(x) \quad (1)$$

با تبدیل x به $x-1$ داریم

$$P_n(x-1) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-12)P_{n-12}(x-1)$$

یا

$$(x-1)P_n(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-11)(x-12)P_{n-12}(x-1)$$

با استفاده از رابطه (1) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (x-12)x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-11)P_{n-12}(x) &= \\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-11)(x-12)P_{n-12}(x-1) & \end{aligned}$$

در نتیجه، $P_{n-12}(x) = P_{n-12}(x-1)$ می‌گیریم $Q(x) = P_{n-12}(x)$ ؛ داریم

$$Q(x-1) = Q(x)$$

که $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-12$ است. اگر $Q(x) = Q_0(x) = c$ (یعنی $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه صفر و برابر با یک مقدار ثابت باشد)، آنگاه رابطه $Q(x) = Q(x-1)$ برقرار است.

حال ثابت می‌کنیم که $Q(x) = c$ تنها حالتی است که رابطه $Q(x) = Q(x-1)$ می‌تواند برقرار باشد. اگر

$$Q(x) = Q_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$$

که در آن $k \geq 1$ و $a_0 \neq 0$ ، آنگاه از $Q(x) = Q(x-1)$ نتیجه می‌شود

$$a_0(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + \cdots + a_k = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

با مساوی قرار دادن ضریب x^{k-1} در دو طرف تساوی، خواهیم داشت

$$ka_0 + a_1 = a_1 \implies a_0 = 0$$

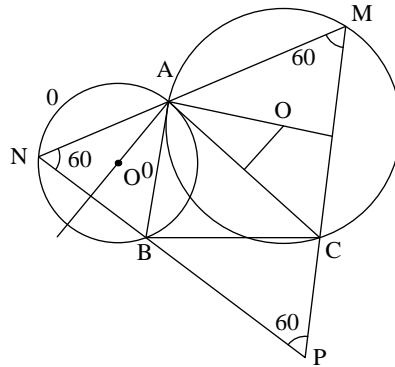
و این متناقض با $a_0 \neq 0$ است. پس $k=0$ و بنابراین، $Q(x) = c$. در نتیجه،

$$P(x) = cx(x-1)(x-2)\cdots(x-11)$$

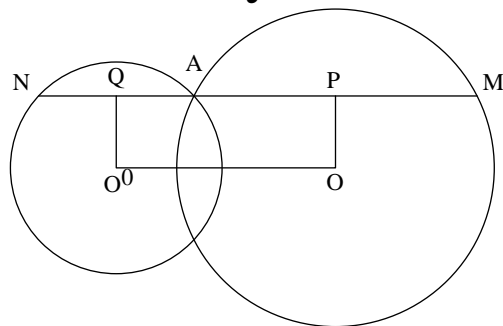
یعنی $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۱۲ است.

۴. کمان درخورهای 60° را بر AC و AB رسم می‌کنیم و آنها را دایره γ و γ' می‌نامیم. هر خطی که از A رسم شود تا γ و γ' را در M و N قطع کند و آنگاه خطوط MC و NB همدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کنند، مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱). در نتیجه بینهایت مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان بر ABC محیط کرد. حال برای اینکه مساحت یا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع ماکزیمم شود کافی است ضلع آن ماکزیمم شود. پس برای حل این قسمت کافی است از نقطه A خطی رسم کنیم به طوری که MN ماکزیمم شود. ثابت می‌کنیم هرگاه از A خطی به موازات OO' (خط‌المركزین دو دایره γ و γ') رسم کنیم این خاصیت را خواهد داشت.

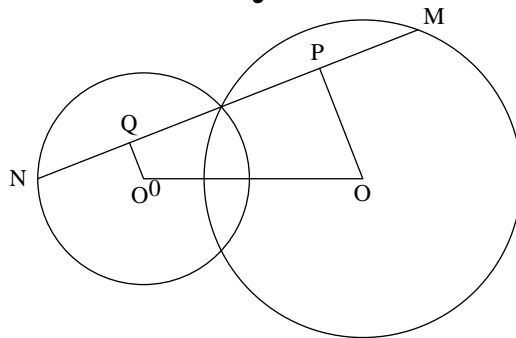
حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

اگر MN موازی OO' باشد، آنگاه واضح است که $MN = 2OO'$ (شکل ۲).
 ولی اگر MN موازی OO' نباشد، $MN < 2OO'$ (شکل ۳). زیرا اگر از O و O' به MN عمود
 کنیم و پاهای عمود را P و Q بنامیم، خواهیم داشت

$$\frac{MN}{2} = PQ < OO' \implies MN < 2OO'$$

۵. فرض می‌کنیم

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

حل مسائل مرحله‌ی اول پنجمین المپیاد ریاضی

در این صورت، درجه‌های $f(x)$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ به ترتیب n ، $n-1$ و $n-2$ هستند. باید داشته باشیم

$$f(2x) = f'(x)f''(x)$$

پس $n = (n-1) + (n-2)$ و $n = 3$. همچنین

$$\forall x, \quad \lambda ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$$

از اتحاد فوق دستگاه معادلات زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} \lambda a = 18a^2 \\ 4b = 6ab + 12ab \\ 2c = 4b^2 + 6ac \\ d = 2bc \end{cases}$$

پس از حل، $f(x) = \frac{4}{3}x^3$.

۶. هر یک از a_i ها را می‌توان کوچکتر از ۴ گرفت زیرا $a_i = (a_i - 2) + 2$ و اگر $a_i \geq 4$ ، $a_i \geq 2(a_i - 2) \geq a_i$ و اگر به جای a_i دو عدد $(a_i - 2)$ و ۲ را قرار دهیم، حاصلضرب بزرگتر خواهد شد. حال ادعا می‌کنیم که در بین a_i ها بیش از دو تا عدد ۲ نمی‌توانیم داشته باشیم زیرا

$$3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2, \quad 2 + 2 + 2 = 3 + 3$$

پس به جای هر سه تا عدد ۲ می‌توان اعداد ۳ و ۳ را انتخاب کرد. در نتیجه با توجه به تساوی

$$1366 = 3 \times 454 + 2 + 2$$

خواهیم داشت

$$n = 456, \quad a_1 = a_2 = \dots = a_{454} = 3, \quad a_{455} = a_{456} = 2$$

یعنی ماکزیم حاصلضرب، $3^{454} \times 2^2$ خواهد بود.