

# آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱  
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. اعداد صحیح و مثبت  $a$ ،  $b$  و  $c$  را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

۲. فرض کنید تابع حقیقی  $f$  در فاصله  $[0, \infty)$  تعریف شده و  $f'$  و  $f''$  در این فاصله موجود باشند و داشته باشیم

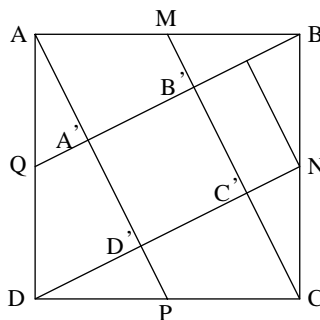
$$f''(x) = \frac{1}{x^2 + f'(x)^2 + 1}; \quad f(0) = f'(0) = 0$$

ثابت کنید تابع  $g$  با ضابطه

$$g(0) = 0, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$

کراندار است.

۳. در شکل زیر نقاط  $M$ ،  $N$ ،  $P$  و  $Q$  به ترتیب در وسط اضلاع مربع  $ABCD$  قرار دارند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی  $A'B'C'D'$  برابر  $\frac{1}{8}$  مساحت مربع  $ABCD$  است.



# آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی

۴. مطلوب است محاسبه عبارت

$$A = \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \dots \times \sin 89^\circ$$

۵. تابع پیوسته  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را چنان تعیین کنید که به ازای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  داشته باشیم

$$f(x^2 - y^2) = f(x)^2 - f(y)^2$$

۶. چهار خط متمایز  $L_1, L_2, L_3$  و  $L_4$  را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه‌تای آنها در یک صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط  $L_1$  و  $L_2$  نقطه  $A$ ، محل تقاطع خطوط  $L_2$  و  $L_3$  نقطه  $B$  و محل تقاطع خطوط  $L_3$  و  $L_4$  نقطه  $C$  باشد. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهار خط فوق را قطع می‌نمایند تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.