حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم پنجمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. از رابطهٔ اول داریم

$$\begin{aligned} ۰ &= a^۳ - b^۳ - c^۳ - ۳abc \\ &= (a-b-c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab - bc + ca) \end{aligned}$$

ولی

$$(a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab - bc + ca) = \frac{۱}{۲}\left((a+b)^۲ + (b-c)^۲ + (c+a)^۲\right)$$

پس عبارت بالا وقتی و فقط وقتی صفر است که

$$a = -b \quad \text{و} \quad b = c \quad \text{و} \quad c = -a$$

که با توجه به مثبت بودن a و b و c غیر ممکن است. پس داریم

$$\begin{cases} a = b + c \\ a^۲ = ۲(b+c) \end{cases}$$

و بنابراین، $a^۲ = ۲a$، یعنی $a = ۲$. پس $b + c = ۲$ و بنابراین $b = c = ۱$.

۲. چون f' و f'' پیوسته‌اند پس انتگرال‌پذیرند، و داریم

$$\begin{aligned} \int_۰^x f''(t)dt &= \int_۰^x \frac{dt}{t^۲ + f'(t)^۲ + ۱} \\ &\leqslant \int_۰^x \frac{dt}{t^۲ + ۱} \\ &= \operatorname{Arctg} t\Big|_۰^x = \operatorname{Arctg} x \end{aligned}$$

پس

$$f'(x) - f'(۰) \leqslant \operatorname{Arctg} x$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned}\int_{0}^{x} f'(t)\,dt &\leqslant \int_{0}^{x} \operatorname{Arctg} t\,dt\\ &= x\operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^{2})\end{aligned}$$

یعنی

$$f(x) \leqslant x\operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^{2})$$

و در نتیجه،

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \arctan x - \frac{1}{2x}\ln(1+x^{2})$$

حد طرف دوم در بینهایت برابر $\frac{\pi}{2}$ است؛ پس عددی مانند A هست که در بازهٔ $[A,\infty)$، تابع g از بالا کراندار است. از پیوستگی g در $[0,A]$ نتیجه می‌شود که g در این بازه هم از بالا کراندار است. چون g نامنفی است پس در $[0,\infty)$ کراندار است.

۳. به سهولت دیده می‌شود که چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است، $A'B' = B'B$ و $MB' = \frac{1}{2}AA'$. واضح است که مثلثهای MBC، AQB، ADP و DCN برابرند. بنابراین،

$$S_{ABCD} = 4 \times S_{MBC} - 4S_{MBB'} + S_{A'B'C'D'}$$

واضح است که مساحت مثلث MBB' برابر $\frac{1}{4}$ مساحت مربع $A'B'C'D'$ است پس

$$S_{ABCD} = 4 \times S_{MBC}$$

همچنین بدیهی است که

$$S_{MBC} = 5S_{MBB'}$$

پس

$$S_{ABCD} = 4 \times 5S_{MBB'} = 5S_{A'B'C'D'}$$

۴. داریم

$$\sin x \sin(90^\circ - x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}A &= (\sin 1^\circ \sin 89^\circ)(\sin 2^\circ \sin 88^\circ)\cdots(\sin 44^\circ \sin 46^\circ)\sin 45^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^{45}}(\sin 2^\circ \sin 4^\circ \cdots \sin 88^\circ)\end{aligned}$$

به روش مشابه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}}(\sin 4^\circ \sin 8^\circ \sin 12^\circ \cdots \sin 88^\circ)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}}(\sin 4^\circ \sin 56^\circ \sin 64^\circ)\\ &\quad \times (\sin 8^\circ \sin 52^\circ \sin 68^\circ)\cdots(\sin 28^\circ \sin 32^\circ \sin 88^\circ)\sin 60^\circ\end{aligned}$$

با استفاده از رابطهٔ

$$\sin x \sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4}\sin 3x$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{2^{67}} \cdot \frac{1}{4^{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 12^\circ \sin 24^\circ \cdots \sin 84^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2^{82}}(\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 72^\circ)(\sin 24^\circ \sin 36^\circ \sin 48^\circ)\sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2^{82}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4^{2}}(\sin 36^\circ \sin 72^\circ) \end{aligned}$$

یا به عبارتی

$$A = \frac{\sqrt{18}}{2^{87}}\sin 36^\circ \sin 72^\circ \qquad (1)$$

البته می‌توان $\sin 36^\circ$ و $\sin 72^\circ$ را نیز محاسبه کرد و مقدار عددی آنها را در رابطهٔ (۱) قرار داد.

۵. با فرض $x = y$، $y = 0$ و $x = 0$ به ترتیب داریم

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x^2) &= f(x)^2 \\ f(-y^2) &= -f(y)^2 \end{aligned}$$

فرض کنید u و v دو عدد حقیقی باشند که $u > 0$ و $v < 0$. با فرض $x^2 = u$ و $-y^2 = v$، داریم

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

حال اگر $u \geqslant 0$ داریم

$$u = 2u - u$$

و از طرفی،

$$f(-u) = -f(\sqrt{u})^2 = -f(u)$$

پس

$$f(u) = f(2u) - f(u)$$

یعنی

$$f(2u) = 2f(u)$$

به استقرا می‌توان ثابت کرد که

$$f(nu) = nf(u)$$

و واضح است که رابطهٔ اخیر به‌ازای $u < 0$ نیز برقرار است.

از این نتیجه می‌توان ثابت کرد که اولاً به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $f(n) = nf(1)$ و اگر به جای u در رابطهٔ $f(nu) = nf(u)$، $\frac{1}{n}$ بگذاریم،

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n}$$

پس برای هر r گویا، $f(r) = rf(۱)$. اگر بگیریم $a = f(۱)$، تابع f در تمام نقاط گویا بر تابع $g(x) = ax$ منطبق است و به خاطر پیوسته بودن f، $f = g$. از اینجا به سهولت نتیجه می‌شود که

$$f(x) = ax$$

که $a = ۰$ یا $a = ۱$ است (با استفاده از $f(x)^۲ = f(x^۲)$).

۶. اگر سه نقطه بر هم منطبق باشند همواره بینهایت خط با خاصیت مورد نظر قابل رسم است (هر خطی که از این نقطه بگذرد جواب است). به همین ترتیب در حالتی که دو نقطه بر هم منطبق باشند همواره بینهایت خط جواب مسأله است. اگر A، B و C متمایز باشند، خطی که از A به C وصل می‌شود به‌وضوح دارای این خاصیت است.

حال برای تعیین تعداد حداکثر خطوط، صفحهٔ گذرنده از $L_۱$ و $L_۲$ را با $P_۱$ و صفحهٔ گذرنده از $L_۳$ و $L_۴$ را با $P_۲$ نمایش می‌دهیم. چون B به هر دو صفحه تعلق دارد، پس $P_۱$ و $P_۲$ یا بر هم منطبقند یا فصل مشترکی چون L دارند. شرط اول امکان ندارد، چون در آن صورت چهار خط در یک صفحه قرار می‌گیرند که خلاف فرض است. اگر L با خطوط $L_۱$ و $L_۴$ موازی نباشد، آنگاه L نیز یک جواب مسأله است. اگر L با یکی از این دو خط موازی باشد، آنگاه L نمی‌تواند جواب مسأله باشد. از طرف دیگر هیچ خط دیگری جز خط L و خطی که A و C را به هم وصل می‌کند نمی‌تواند هر چهار خط را قطع نماید. زیرا اگر چنین خطی از A نگذرد در صفحه $P_۱$ واقع است. در این صورت اگر محل تقاطع این خط با خط $L_۳$ نقطهٔ B' باشد، چون B متعلق به $P_۱$ است و B' نیز به $P_۱$ تعلق دارد پس دو نقطهٔ خط $L_۳$ روی $P_۱$ هستند و در نتیجه $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ در یک صفحه‌اند که خلاف فرض است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که این خط از C نیز باید بگذرد، پس خط مفروض همان AC است.