آزمون مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $x^۳+x^۲+۲x-۱=۰$ باشد آنگاه دو ریشهٔ دیگر معادله را به صورت کثیرالجمله‌ای]چندجمله‌ای[با ضرایب گویا بر حسب α به‌دست آورید.

۲. در مثلث غیر مشخص ABC که هر سه زاویهٔ آن حاده هستند ارتفاعات AD، BE و CF را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را به ترتیب در P، Q و R قطع کنند. اگر h طول بزرگترین ارتفاع و s طول کوچکترین پاره‌خط از بین پاره‌خطهای AP، BQ و CR باشد ثابت کنید

$$\frac{h}{s}>\frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۳. دو تابع حقیقی f و g بر]روی[$\mathbb{R}$ را وابسته گوییم هرگاه تابع حقیقی دوسویی h (یک‌به‌یک و پوشا)]روی[$\mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $h\circ f=g\circ h$ ($f\circ g$ ترکیب توابع f و g است).

الف) نشان دهید اگر f و g وابسته و g و φ نیز وابسته باشند آنگاه f و φ نیز وابسته‌اند.

ب) مطلوب است شرط لازم و کافی بر حسب a و b برای اینکه دو تابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۲-ax+b$ وابسته باشند.

۴. معادلهٔ سیالهٔ زیر را حل کنید (m، n، p و q ارقام هستند):

$$(m-۹)^۲\times m!+(n-۸)^۲\times n!+۵۰\times p!+۴۹\times q!=\sqrt{\overline{mnpq}}$$

۵. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ ($۰<a<b$) تعریف شده و در رابطهٔ

$$\forall x,y\in[a,b],\quad x\neq y\Rightarrow |f(x)-f(y)|<|x-y|$$

صدق کند؛ و داریم $f(a)=f(b)=۰$. ثابت کنید

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |f(x)-f(y)|<\frac{a+b}{۲}$$

۶. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AC>BD$، از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^۲$$