

حل مسائل آزمون مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. می‌دانیم $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ ریشه گویا ندارد (چرا؟) پس $P(x)$ روی اعداد گویا تجزیه نمی‌شود. یعنی α نمی‌تواند ریشه چندجمله‌ای دیگری از درجه کمتر از ۳ باشد و $P(x)$ تنها چندجمله‌ای درجه سوم تحویل‌ناپذیر روی اعداد گویاست که $P(\alpha) = 0$. حال چندجمله‌ای $P(x-1) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ را در نظر می‌گیریم. ریشه‌های $P(x-1) = 0$ عبارتند از $\alpha+1$ ، $\beta+1$ و $\gamma+1$ که α ، β و γ ریشه‌های $P(x) = 0$ هستند. اما،

$$\beta \cdot \gamma = \frac{1}{\alpha}, \quad (\beta+1)(\gamma+1) = -\frac{1}{\alpha+1}$$

پس

$$\beta + \gamma = (\beta+1)(\gamma+1) - \beta\gamma - 1 = -\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha} - 1$$

یعنی

$$\begin{cases} \beta + \gamma = \frac{-\alpha^2 - 3\alpha - 1}{\alpha(\alpha+1)} \\ \beta \cdot \gamma = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

در نتیجه،

$$\gamma = -\frac{\alpha+1}{\alpha}, \quad \beta = -\frac{1}{\alpha+1}$$

حال قرار می‌دهیم

$$\beta = -\frac{1}{\alpha+1} = A\alpha^2 + B\alpha + C$$

ضرایب A ، B و C را تعیین می‌کنیم، خواهیم داشت

$$A\alpha^3 + (A+B)\alpha^2 + (B+C)\alpha + C + 1 = 0$$

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی

داریم $\alpha^3 = 1 + 2\alpha - \alpha^2$ که با قرار دادن آن در رابطهٔ اخیر به دست می‌آوریم

$$B\alpha^2 + (B+C+2A)\alpha + (A+C+1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} B=0 \\ B+C+2A=0 \\ A+C+1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A=1 \text{ و } C=-2$$

بنابراین،

$$\beta = \alpha^2 + 0 \times \alpha - 2 = \alpha^2 - 2$$

و چون $\alpha + \beta + \gamma = -1$ به دست می‌آید

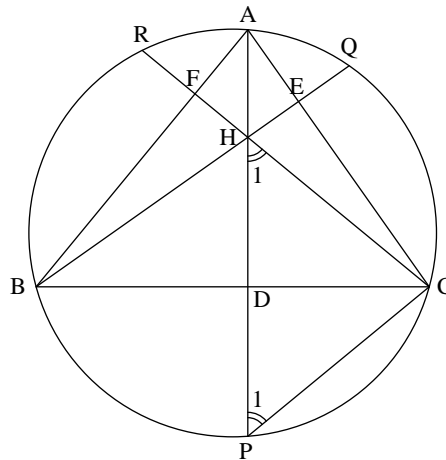
$$\gamma = -1 - \alpha - \alpha^2 + 2 = -\alpha^2 - \alpha + 1$$

۲. می‌دانیم که قرینهٔ محل تلاقی سه ارتفاع، H ، نسبت به هر یک از اضلاع، روی دایرهٔ محیطی است. پس

$$\frac{AP}{AD} = 1 + \frac{DP}{AD} = 1 + \frac{HD}{AD}$$

در نتیجه،

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = 3 + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{FC}$$



اما،

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{FC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = 1$$

پس

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = 4$$

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی

و با توجه به نامساوی $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ داریم $(x, y, z \geq 0)$

$$\frac{AP}{AD} \times \frac{BQ}{BE} \times \frac{CR}{CF} \leq \frac{64}{27}$$

پس

$$\frac{s^3}{h^3} \leq \frac{64}{27} \implies \frac{h}{s} \geq \frac{3}{4} > \frac{1367}{1989}$$

۳. الف) توجه می‌کنیم که f و g وابسته‌اند هرگاه $h \circ g \circ h^{-1} = f$. پس اگر $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} = g$ و h و ψ یک‌به‌یک و پوشا هستند، آنگاه

$$f = h^{-1}(\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi) h = (\psi h)^{-1} \circ \varphi \circ (\psi h)$$

و ψh نیز یک‌به‌یک و پوشاست. پس φ و f نیز وابسته‌اند.

ب) از تساوی $h(f(x)) = g(h(x))$ داریم

$$h(x^2) = h(x)^2 - ah(x) + b \quad (1)$$

اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم خواهیم داشت

$$h(x^2) = h(-x)^2 - ah(-x) + b \quad (2)$$

حال اگر دو تساوی (۱) و (۲) را از هم کم کنیم خواهیم داشت

$$(h(x) - h(-x))(h(x) + h(-x) - a) = 0$$

چون h یک‌به‌یک است پس برای هر $x \neq 0$ ، $h(x) - h(-x) \neq 0$ ؛ بنابراین، برای هر x غیر صفر، $h(x) + h(-x) - a = 0$. چون h تابعی پوشاست پس x_0 موجود است به طوری که $h(x_0) = \frac{a}{4}$ و در نتیجه، $h(-x_0) = \frac{a}{4}$ و چون h تابعی یک‌به‌یک است پس $x_0 = 0$ یعنی $h(0) = \frac{a}{4}$ حال در تساوی

$$h(x^2) = h(x)^2 - ah(x) + b$$

به جای x صفر می‌گذاریم، خواهیم داشت

$$\frac{a}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b$$

یعنی

$$a^2 + 2a = 4b$$

این شرط کافی است زیرا توجه می‌کنیم که برای تابع یک‌به‌یک و پوشای

$$h(x) = x + \frac{a}{4}$$

خواهیم داشت $h \circ f = g \circ h$.

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی

۴. می‌دانیم $99 \leq \lfloor \sqrt{mnpq} \rfloor$ ؛ بنابراین،

$$(m-9)^2 \times m! + (n-8)^2 \times n! + 50 \times p! + 49 \times q! \leq 99$$

حداقل مقدار $p!$ و $q!$ یک است پس کمترین مقدار $49 \times q! + 50 \times p!$ ، ۹۹ است. پس

$$(m-9)^2 \times m! + (n-8)^2 \times n! = 0$$

$$(m-9)^2 \times m! = 0 \implies m = 9$$

$$(n-8)^2 \times n! = 0 \implies n = 8$$

و

$$50 \times p! + 49 \times q! \leq 99 \quad (1)$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که $p! = 1$ و $q! = 1$. پس

$$\begin{cases} p = 0 \\ p = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} q = 0 \\ q = 1 \end{cases}$$

تنها جواب $p = 0$ و $q = 1$ در رابطه (۱) صدق می‌کند. بنابراین،

$$\overline{mnpq} = 99^2 = 9801$$

۵. اگر $x = y$ باشد حکم واضح است. اگر x دلخواه و $y = a$ یا $y = b$ داریم

$$\begin{cases} |f(x) - f(a)| < |x - a| = x - a < x \\ |f(x) - f(b)| < |x - b| = b - x \end{cases}$$

پس

$$|f(x)| < \frac{b}{2} < \frac{a+b}{2} |f(x) - f(b)| < \frac{a+b}{2} |f(x) - f(a)| < \frac{a+b}{2}$$

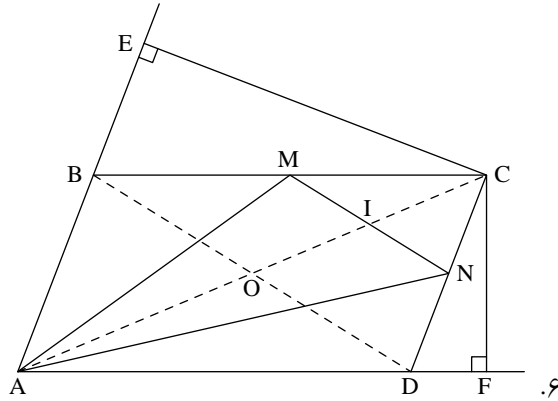
و اگر $x, y \in (a, b)$ ، کافی است فرض کنیم $|x - y| > \frac{a+b}{2}$ (در غیر اینصورت حکم ثابت می‌شود)، داریم

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x)| + |f(y)| \\ &< x + (b - y) \\ &= b - (y - x) \end{aligned}$$

می‌توان فرض کرد $x < y$ ، پس

$$|f(x) - f(y)| < b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} < \frac{b+a}{2}$$

حل مسائل مرحله‌ی اول ششمین دوره المپیاد ریاضی



در دایره‌ای به قطر BC (که مرکزش M است) داریم P_M^A یعنی قوت نقطه A نسبت به دایره با مرکز M

$$P_M^A = AB \cdot AE = AM^2 - \frac{BC^2}{4}$$

در دایره‌ای به قطر CD (که مرکزش N است) داریم

$$P_N^A = AD \cdot AF = AN^2 - \frac{CD^2}{4}$$

I را محل تقاطع MN و AC و O را محل تقاطع BD و AC می‌گیریم. طرفین رابطه‌های بالا را جمع می‌کنیم.

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF$$

$$\begin{aligned} &= (AM^2 + AN^2) - \frac{1}{4}(BC^2 + CD^2) \\ &= \frac{1}{4}MN^2 + 2AI^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}BD^2 + 2CO^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4}AC\right)^2 - \frac{1}{8}BD^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}BD^2 + \frac{18}{16}AC^2 - \frac{1}{8}BD^2 - \frac{1}{8}AC^2 \\ &= \frac{9}{8}AC^2 - \frac{1}{8}AC^2 \end{aligned}$$

پس

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$