آزمون مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. الف) نشان دهید برای هر m و n طبیعی،

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$$

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید وقتی که n به سمت بینهایت میل کند،

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} P(k)}{n^{m+1}}$$

دارای حد است.

۲. اگر در چهارضلعی محیطی $ABCD$، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I، J و O بر یک استقامتند.

۳. ثابت کنید که تابع همانی، تنها تابع پوشا مانند f از $\mathbb{N}$ (مجموعهٔ اعداد طبیعی) به $\mathbb{N}$ است که در شرط

$$f\big(f(n)+f(m)\big) = n+m \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

صدق می‌کند.

۴. دنبالهٔ $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 1 \text{ اگر } \\ \left(\frac{2n-3}{2n}\right) a_{n-1} & n \geqslant 2 \text{ اگر } \end{cases}$$

ثابت کنید به‌ازای هر $n \geqslant 1$، $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$.

۵. اگر در چهاروجهی $ABCD$ ارتفاعهای وارد از هر رأس بر وجه مقابل را با h_a، h_b، h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

آزمون مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی

۶. تعداد 1369^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروضند که با کنار گذاشتن هریک از این اعداد بقیه را می‌توان به ۱۳۶۸ دستهٔ مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصلضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساویند.