حل مسائل مرحله‌ی دوم ششمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. الف) داریم

$$\begin{aligned} &k(k+1)\cdots(k+m-1) \\ &\qquad = k(k+1)\cdots(k+m-1)\times\frac{k+m-k+1}{m+1} \\ &\qquad = \frac{1}{m+1}\big(k(k+1)\cdots(k+m)-(k-1)k\cdots(k+m-1)\big) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) &= \frac{1}{m+1}\big(n(n+1)\cdots(n+m)-0\big) \\ &= \frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1} \end{aligned}$$

ب) ابتدا نشان می‌دهیم که بزرگترین توان n در $\sum\limits_{k=1}^{n} P(k)$ برابر $m+1$ است. اثبات با استقرا نسبت به m است. واضح است که هر چندجمله‌ای از درجهٔ m را می‌توان به صورت

$$ax(x+1)\cdots(x+m-1)+P_{m-1}(x)$$

نوشت که در آن a عددی است ثابت و P_{m-1} چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر $m-1$ است.

حال اگر $m=1$، آنگاه $P(x)$ به صورت $ax+b$ $(a\neq 0)$ است و در نتیجه،

$$\begin{aligned} P(1)+P(2)+\cdots+P(n) &= a(1+2+\cdots+n)+nb \\ &= a\frac{n(n+1)}{2}+nb \end{aligned}$$

واضح است که درجهٔ آن نسبت به n، $m+1=2$ است و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}P(k)}{n^2}=\frac{a}{2}$$

اگر حکم فوق در مورد چندجمله‌ایهای با درجهٔ کمتر از m برقرار باشد آنگاه

$$P_m(x) = ax(x+۱)\cdots(x+m-۱) + P_{m-۱}(x)$$

بنابراین،

$$\sum_{k=۱}^{n} P(k) = a\sum_{k=۱}^{n} k(k+۱)\cdots(k+m-۱) + \sum_{k=۱}^{n} P_{m-۱}(k)$$

جملهٔ دوم بنابر فرض استقرا از درجهٔ حداکثر m است و جملهٔ اول بنابر (الف) برابر

$$\frac{a}{m+۱}n(n+۱)\cdots(n+m-۱)$$

است که توان n در آن $m+۱$ است و بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=۱}^{n} P(k)}{n^{m+۱}} = \frac{a}{m+۱}$$

موجود است.

۲. مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به S و مساحت هر مثلث مانند IAB را به S_{IAB} نمایش می‌دهیم. واضح است که

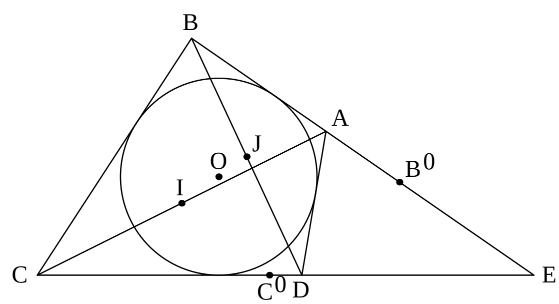
$$S_{IDC} + S_{IBA} = \frac{۱}{۲}S \qquad (۱)$$

$$S_{JDC} + S_{JBA} = \frac{۱}{۲}S \qquad (۲)$$

$$S_{ODC} + S_{OBA} = \frac{۱}{۲}S \qquad (۳)$$

می‌دانیم که در چهارضلعی محیطی $ABCD$،

$$AB + DC = AD + BC$$



AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در E یکدیگر را قطع کنند. آنگاه روی خط AB نقطهٔ B' و روی خط CD نقطهٔ C' را طوری انتخاب می‌کنیم که $EB' = AB$ و $EC' = DC$ باشد. داریم

$$S_{IEC'} + S_{IEB'} = \frac{۱}{۲}S$$

و

$$S_{IC'EB'} = S_{IC'B'} + S_{EC'B'}$$

در نتیجه،

$$S_{IC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \qquad (۴)$$

اگر نظیر عملیات فوق را نسبت به J و O انجام دهیم تساویهای زیر به‌دست می‌آیند.

$$S_{JC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \qquad (۵)$$

و

$$S_{OC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'} \qquad (۶)$$

از (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

$$S_{IC'B'} = S_{JC'B'} = S_{OC'B'} \qquad (۷)$$

از این رو سه نقطهٔ J ،O و I بر یک استقامتند.

۳. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \geqslant ۲$ باشد، آنگاه $f(n) \geqslant ۲$. اگر $n \geqslant ۲$، آنگاه $n = (n-۱) + ۱$، چون $۱, n-۱ \in \mathbb{N}$ و f پوشاست پس اعدادی طبیعی مانند α و β وجود دارند که $f(\alpha) = n-۱$ و $f(\beta) = ۱$ و بنابراین،

$$f(n) = f(n-۱+۱) = f\big(f(\alpha) + f(\beta)\big) = \alpha + \beta$$

واضح است که $\alpha + \beta \geqslant ۲$. پس $f(۱) = ۱$. حال به استقرا، بدیهی است که $f(n) = n$.

۴. از رابطهٔ

$$a_n = \left(\frac{۲n-۳}{۲n}\right) a_{n-۱}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$۲k a_k = (۲k-۳) a_{k-۱}, \quad (k \geqslant ۲)$$

از این رو داریم

$$a_{k-۱} = (۲k-۲) a_{k-۱} - ۲k a_k$$

بنابراین

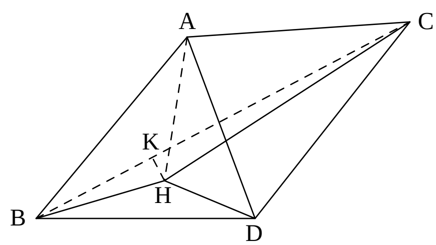
$$\begin{aligned} \sum_{k=۱}^{n} a_k &= \sum_{k=۲}^{n+۱} a_{k-۱} \\ &= \sum_{k=۲}^{n+۱} \big((۲k-۲)\, a_{k-۱} - ۲k a_k\big) \\ &= ۲a_۱ - ۲(n+۱)\, a_{n+۱} \end{aligned}$$

به استقرا روشن است که به‌ازای هر n، $a_n > ۰$. پس

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k < ۲a_۱ = ۱$$

۵. در چهاروجهی $ABCD$ مساحت هریک از وجه‌ها را به صورتهای زیر نمایش می‌دهیم $S_{BCD} = S_a$، $S_{ACD} = S_b$، $S_{ABD} = S_c$ و $S_{ABC} = S_d$.
حال اگر حجم هرم را با V نمایش دهیم خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۳}S_a h_a = \frac{۱}{۳}S_b h_b = \frac{۱}{۳}S_c h_c = \frac{۱}{۳}S_d h_d = V$$



از این رو داریم $S_a = \frac{۳V}{h_a}$، $S_b = \frac{۳V}{h_b}$، $S_c = \frac{۳V}{h_c}$ و $S_d = \frac{۳V}{h_d}$.
حال ثابت می‌کنیم که

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

برای اثبات از A ارتفاع AH را بر وجه BCD رسم می‌کنیم، H را به رئوس B، C و D وصل کرده و از H عمود HK را بر یال BC رسم می‌کنیم. از K به A وصل می‌کنیم. AK بر BC عمود است زیرا $AH \perp BCD$، پس $AH \perp BC$ و $HK \perp BC$ پس $AHK \perp BC$. به بیان دیگر، در صفحهٔ AHK دو خط AH و HK بر BC عمودند پس BC بر صفحهٔ AHK عمود است و در نتیجه بر کلیهٔ خطوط آن و به‌خصوص بر AK عمود است. از طرفی داریم

$$S_{ABC} = S_d = \frac{AK \cdot BC}{۲}$$
$$S_{HBC} = \frac{KH \cdot BC}{۲}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه AHK، AK وتر است، پس $AK > KH$ و در نتیجه $S_d > S_{HBC}$. به دلیل مشابه ثابت می‌شود که $S_b > S_{HCD}$ و $S_c > S_{HBD}$. از جمع این سه نامساوی داریم

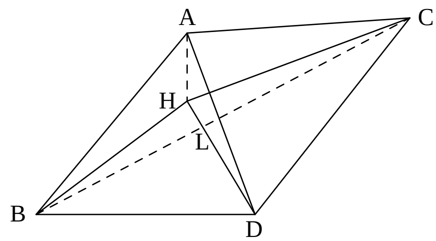
$$S_a < S_b + S_c + S_d$$
$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

این حالتی بود که H در داخل مثلث BCD باشد. در حالتی که H خارج مثلث BCD باشد، فرض می‌کنیم H در طرف BC باشد و L را محل تقاطع BC و HD می‌گیریم. خواهیم داشت

$$S_b > S_{HCD} > S_{LCD}$$
$$S_c > S_{HBD} > S_{LBD}$$



پس

$$S_b + S_d > S_{LCD} + S_{LBC}$$

و از این رو داریم

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

یعنی،

$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

پس حکم برقرار است.

۶. بدون اینکه از کلّیت مسأله کاسته شود تمام اعداد را می‌توان طبیعی در نظر گرفت (کافی است تمام اعداد را در کوچکترین مضرب مشترک مخرجها ضرب کنیم). آشکار است که هریک از اعداد را که برداریم، بقیهٔ اعداد را می‌توان به دو دستهٔ مساوی تقسیم کرد که حاصلضرب هر دو دسته یکسان گردد.

تمام اعداد اولی را که در تجزیه این اعداد به کار رفته است به $p_۱$، $p_۲$، ... و p_k نشان می‌دهیم. با ضرب تمام اعداد در $p_۱ p_۲ \cdots p_k$ می‌توان فرض کرد که در تجزیهٔ تمام اعداد، اعداد اول یکسان به کار رفته است. حال کافی است نشان دهیم که توان هریک از این اعداد اول در هریک از این اعداد یکسان است. اگر توانهای عدد اول $p_۱$ را به ترتیب با $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ... و α_m نشان دهیم که $m = ۱۳۶۹^n$ است ادعا می‌کنیم که $\alpha_۱ = \alpha_۲ = \cdots = \alpha_m$ و برای سایر p_iها نیز چنین است. حال توجه می‌کنیم که α_iها دارای این خاصیت هستند که هریک را کنار بگذاریم، بقیه را می‌توان به دو دستهٔ مساوی تقسیم کرد که حاصلجمع اعداد هر دسته یکسان گردند و توجه می‌کنیم که اگر هر α_i را به یک عدد تقسیم، یا در یک عدد ضرب ویا با یک عدد جمع کنیم این خاصیت باقی می‌ماند.

آشکار است که همه α_iها با هم یا زوج هستند یا فرد، زیرا اگر یکی را کنار می‌گذاشتیم مجموع بقیه به ۲ بخشپذیر می‌شد. حال فرض می‌کنیم که α_k کوچکترین این اعداد باشد پس اعداد $\alpha_۱ - \alpha_k$، $\alpha_۲ - \alpha_k$، ... و $\alpha_n - \alpha_k$ نیز دارای این خاصیت α_iها هستند. حال فرض می‌کنیم که $\alpha_i - \alpha_k = ۲^{m_i}\gamma_i$ که γ_iها فرد هستند آنگاه همهٔ $\alpha_i - \alpha_k$ها را به ۲^p تقسیم می‌کنیم (p کوچکترین m_iهاست). بنابراین در بین اعداد $\frac{\alpha_۱ - \alpha_k}{۲^p}$، ... و $\frac{\alpha_n - \alpha_k}{۲^p}$ یک عددِ فرد و یک عددِ زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد که غیر ممکن است مگر اینکه به‌ازای هر i، $\alpha_i = \alpha_k$.