

# آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

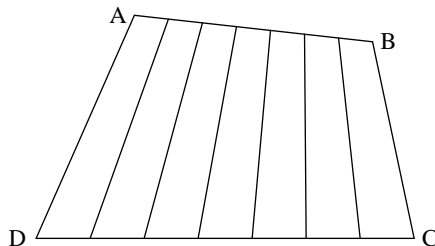
زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. نشان دهید اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  طولهای اضلاع یک مثلث باشند، داریم

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca)$$

۲. در چهارضلعی  $ABCD$  (شکل زیر) ضلع  $AB$  را به هفت قسمت مساوی و ضلع  $CD$  را نیز به هفت قسمت مساوی تقسیم [کرده] و نقاط تقسیم را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا هفت چهارضلعی کوچک به‌دست آید.



ثابت کنید دست کم یکی از چهارضلعیهای کوچک مساحتی برابر  $\frac{1}{7}$  مساحت چهارضلعی  $ABCD$  دارد.

۳. ثابت کنید معادله

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^t xyz$$

که در آن  $x$ ،  $y$ ،  $z$  و  $t$  اعداد طبیعی هستند، جواب ندارد.

۴. اگر  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  فواصل یک نقطه در درون مثلث قائم‌الزاویه از سه ضلع آن و  $a$  طول وتر مثلث باشد، نشان دهید

$$\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \sqrt{d_3} < \sqrt{2a}$$

## آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی

۵.  $n$  نقطه در روی صفحه مفروض است به طوری که فاصله بین هر دو نقطه از آنها بزرگتر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید تعداد جفت‌هایی از این نقاط که فاصله آنها دقیقاً مساوی یک باشد از  $۳n$  تجاوز نمی‌کند.

۶. روی محیط دایره‌ای به شعاع یک متر نقطه دلخواه  $A_0$  را انتخاب و در جهت مثبت دایره مثلثاتی نقاط  $A_1, A_2, A_3, \dots$  را طوری انتخاب می‌کنیم که متر  $\widehat{A_0A_1} = ۱$ ، متر  $\widehat{A_1A_2} = \frac{1}{۲}$ ،  $\dots$ ، متر  $\widehat{A_{n-1}A_n} = \frac{1}{n}$  و  $\dots$  (تعداد نقاط نامتناهی است).

الف) نشان دهید هیچ دو نقطه  $A_i$  و  $A_j$  ( $i \neq j$ ) بر هم منطبق نیستند.

ب) نشان دهید اقل‌اً یک کمان یک میلیمتری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقاط  $A_i$  واقع بر آن بینهایت است.