راه حل آزمون مرحله‌ی اول هفتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. داریم

$$(a+b+c)^{۲}-۳(ab+bc+ca)=\frac{۱}{۲}\left((a-b)^{۲}+(b-c)^{۲}+(c-a)^{۲}\right)\geqslant ۰$$

و این همواره برقرار است. بنابراین،

$$۳(ab+bc+ca)\leqslant (a+b+c)^{۲}$$

برای اثبات قسمت دوم نامساوی می‌نویسیم

$$۴(ab+bc+ca)-(a+b+c)^{۲}= a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b+c)$$

چون در مثلثی به اضلاع a، b و c داریم

$$\begin{aligned} b+c>a &\Longrightarrow b+c-a>۰\\ c+a>b &\Longrightarrow c+a-b>۰\\ a+b>c &\Longrightarrow a+b-c>۰ \end{aligned}$$

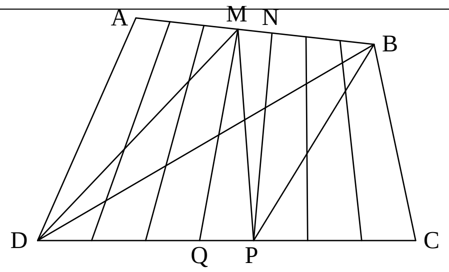
بنابراین،

$$(a+b+c)^{۲}<۴(ab+bc+ca)$$

۲. داریم

$$\left.\begin{aligned} S_{MPN}&=\frac{۱}{۴}S_{MBP}\\ S_{MPQ}&=\frac{۱}{۴}S_{MPD}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow S_{MNPQ}=\frac{۱}{۴}S_{MBPD}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{BDP}&=\frac{۴}{۷}S_{BDC}\\ S_{DMB}&=\frac{۴}{۷}S_{DBA}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow S_{MBPD}=\frac{۴}{۷}S_{ABCD}$$

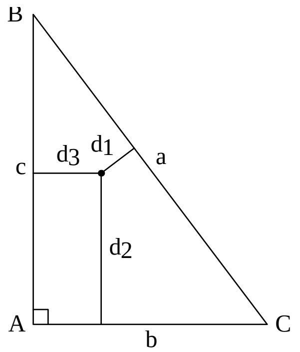


در نتیجه، $S_{MNPQ} = \frac{۱}{۷} S_{ABCD}$. ٪٪در حالت خاص، اگر AB موازی CD باشد مساحت هر هفت چهارضلعی کوچک با یکدیگر ٪مساوی و برابر با $\frac{۱}{۷}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ است.

۳. فرض کنیم $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ جوابی از این معادله باشد. واضح است که x، y و z باید زوج باشند. زیرا اگر فقط یکی از آنها و یا همه فرد باشند، آنگاه سمت چپ معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲^t xyz$ عدد فرد و سمت راست زوج خواهد بود که غیر ممکن است. و اگر فقط دوتای آنها فرد باشند آنگاه سمت چپ معادله بر ۴ قابل قسمت نیست ولی سمت راست بر ۴ قابل قسمت است (z زوج است). در نتیجه،

$$\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{y}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{z}{۲}\right)^۲ = ۲^{t+۱} \left(\frac{x}{۲}\right)\left(\frac{y}{۲}\right)\left(\frac{z}{۲}\right)$$

با همان استدلال بالا، نتیجه می‌شود که $\frac{x}{۲}$، $\frac{y}{۲}$ و $\frac{z}{۲}$ نیز زوج هستند. پس به همین ترتیب برای هر $k \in \mathbb{N}$، باید $\frac{x}{۲^k}$ عدد صحیح باشد که غیر ممکن است.



۴.

داریم

$$\begin{aligned}\sqrt{d_۱} + \sqrt{d_۲} + \sqrt{d_۳} &= \sqrt{ad_۱} \cdot \sqrt{\frac{۱}{a}} + \sqrt{bd_۲} \cdot \sqrt{\frac{۱}{b}} + \sqrt{cd_۳} \cdot \sqrt{\frac{۱}{c}} \\ &\leqslant \sqrt{ad_۱ + bd_۲ + cd_۳} \cdot \sqrt{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}}\end{aligned}$$

(بنابر نامساوی کوشی). اما $ad_۱ + bd_۲ + cd_۳ = ۲S = bc$، پس

$$\sum_{i=۱}^{۳} \sqrt{d_i} \leqslant \sqrt{bc} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ac}{abc}}$$

چون

$$ab+bc+ac < a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۲a^۲$$

پس

$$\sum_{i=۱}^{۳} \sqrt{d_i} < \sqrt{bc} \cdot \sqrt{\frac{۲a^۲}{abc}}$$

در نتیجه، $\sum_{i=۱}^{۳} \sqrt{d_i} < \sqrt{۲a}$.

۵. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر نقطه مانند A حداکثر شش نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها با A مساوی یک باشد. زیرا تمام نقاطی که فاصلهٔ آنها با A مساوی یک است روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع یک واقع هستند و هر دو نقطه روی این دایره که فاصله‌شان حداقل یک باشد باید در دو سر کمانی به اندازهٔ حداقل ۶۰ درجه واقع باشند. در نتیجه بیشتر از شش نقطه ممکن نیست.

به این ترتیب برای هر نقطه بیش از شش جفت که دارای خاصیت فوق باشد نمی‌توان تشکیل داد و چون تعداد نقطه‌ها n است پس کلاً $۶n$ جفت به‌دست می‌آید اما جفت (A,B) با جفت (B,A) فرقی ندارد پس $\frac{۶n}{۲} = ۳n$ جفت به‌دست می‌آید. یعنی بیش از $۳n$ جفت با این خاصیت نخواهیم داشت.

۶. الف) اگر دو نقطهٔ A_i و A_j به فرض $j > i$ بر هم منطبق باشند خواهیم داشت

$$\frac{۱}{i+۱} + \frac{۱}{i+۲} + \cdots + \frac{۱}{j} = ۲k\pi$$

طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است پس تساوی نمی‌تواند برقرار باشد.

ب) چون هیچ دو نقطه‌ای بر هم منطبق نیستند و تعدادشان نامتناهی است اقلاً در یک کمان یک میلیمتری باید تعدادشان نامتناهی باشد زیرا تعداد فواصل یک میلیمتری که می‌توان روی این دایره جدا کرد، متناهی است.