حل مسائل مرحله‌ی دوم هفتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عباداله محمودیان

۱. الف)

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}=\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\frac{۱}{۲\sqrt{n}}$$

چون $\sqrt{n}=\sqrt{n+۱}$.

ب) لم.

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}=\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}>\frac{۱}{۲\sqrt{n+۱}}$$

حال ثابت می‌کنیم اگر $N=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۴۸}}$، آنگاه $\lfloor N\rfloor=۱۲$.

$$\begin{aligned}
\frac{۱}{۲}N&=\frac{۱}{۲\sqrt{۴۸}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۴۷}}+\cdots+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}\\
&>\sqrt{۴۹}-\sqrt{۴۸}+\sqrt{۴۸}-\sqrt{۴۷}+\cdots+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۱\\
&=\sqrt{۴۹}-۱\\
&=۶
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{۱}{۲}N&=\frac{۱}{۲\sqrt{۴۸}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۴۷}}+\cdots+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}\\
&<\sqrt{۴۸}-\sqrt{۴۷}+\sqrt{۴۷}-\sqrt{۴۶}+\cdots+\sqrt{۲}-۱+\frac{۱}{۲}\\
&=\sqrt{۴۸}-\frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{۱}{۲}N>۶&\Longrightarrow N>۱۲\\
\frac{۱}{۲}N<\sqrt{۴۸}-\frac{۱}{۲}&\Longrightarrow N<۱۳
\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \lfloor N\rfloor=۱۲$$

۲. ادعا می‌کنیم مرکز میانه‌ای مثلث نقطهٔ ثابتی است که روی OP قرار دارد و $PM = \frac{۲}{۳}PO$. می‌گیریم $\vec{x} = \overrightarrow{PX}$، $\vec{y} = \overrightarrow{PY}$، $\vec{z} = \overrightarrow{PZ}$ و $\vec{r} = \overrightarrow{PO}$. به وضوح

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}}{۳}$$

کافی است ثابت کنیم $\overrightarrow{PM} = \frac{۲}{۳}\vec{r}$. برای این کار ثابت می‌کنیم بردار

$$\vec{a} = ۳(\overrightarrow{PM} - \frac{۲}{۳}\vec{r}) = \vec{x}+\vec{y}+\vec{z} - ۲\vec{r}$$

مساوی صفر است. حاصلضرب این بردار در بردار $\vec{x}$ صفر است زیرا

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{x} &= (\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}-۲\vec{r})\cdot\vec{x}\\ &= \vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{x}+\vec{z}\cdot\vec{x}-۲\vec{r}\cdot\vec{x}\\ &= \vec{x}\cdot\vec{x}-۲\vec{r}\cdot\vec{x}\\ &= |\vec{x}|^{۲}-۲|r|\cdot|x|\cdot\cos\angle OPX\\ &= PX^{۲}-۲PX\cdot PO\cdot\cos\angle OPX\end{aligned}$$

اما مثلث OPX متساوی‌الساقین به رأس O است پس $PX = ۲PO\cdot\cos\angle OPX$ که از اینجا برابر صفر بودن $\vec{a}\cdot\vec{x}$ معلوم می‌شود. به همین ترتیب $\vec{a}\cdot\vec{y} = \vec{a}\cdot\vec{z} = ۰$. حال که حاصلضرب $\vec{a}$ در سه بردار متعامد صفر است، این بردار خود برابر صفر است که درستی حکم را نتیجه می‌دهد.

۳. ابتدا به استقرا ثابت می‌کنیم

$$a_n = ۱ + \prod_{i=۱}^{n-۱} a_i$$

واضح است که $a_۲ = ۱ + a_۱$. حال فرض می‌کنیم $a_n = ۱ + a_۱ a_۲ \dots a_{n-۱}$.

$$\begin{aligned}a_{n+۱} &= ۱ + a_۱ a_۲ \dots a_{n-۱} + (a_۱ a_۲ \dots a_{n-۱})^{۲}\\ &= ۱ + a_۱ a_۲ \dots a_{n-۱}(۱ + a_۱ a_۲ \dots a_{n-۱})\\ &= ۱ + a_۱ a_۲ \dots a_{n-۱} a_n\end{aligned}$$

در نتیجه، $a_{n+۱} = ۱ + (a_n - ۱)a_n$ یا $a_{n+۱} = a_n^{۲} - a_n + ۱$.

حالا به استقرا ثابت می‌کنیم

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_i} = ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱} - ۱}$$

واضح است که $\frac{۱}{a_۱} = ۲ - \frac{۱}{a_۲ - ۱}$. فرض کنیم $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_i} = ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱}-۱}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n+۱} \frac{۱}{a_i} &= \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_i} + \frac{۱}{a_{n+۱}}\\ &= ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱} - ۱} + \frac{۱}{a_{n+۱}}\\ &= ۲ - \frac{۱}{a_{n+۱}^{۲} - a_{n+۱}} = ۲ - \frac{۱}{a_{n+۲} - ۱}\end{aligned}$$

چون دنبالهٔ $S_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$ صعودی است و ۲ کران بالای آن است، پس حد دارد.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = k \leqslant 2$$

اگر $k < 2$ باشد، از آنجا که $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ پس $\exists n,\ a_n > 1 + \frac{1}{2-k}$.

$$\begin{aligned} a_n > 1 + \frac{1}{2-k} &\Longrightarrow a_n - 1 > \frac{1}{2-k} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{a_n - 1} < 2 - k \\ &\Longrightarrow k < 2 - \frac{1}{a_n - 1} = S_{n-1} \end{aligned}$$

که تناقض است. پس $k = 2$.

۴. فرض کنیم x تیمی باشد که بیشترین تعداد «بُرد» را داشته است. ثابت می‌کنیم برای هر تیم y، یا x از y برده است، یا تیم z وجود دارد که x از z برده است و z از y. اگر x این‌طور نباشد، یک تیم y وجود دارد که اولاً x از y نبرده است و ثانیاً برای هر تیم z که به x باخته است، y از z برده است. پس y کلیهٔ تیمهایی را که x از آنها برده است، برده و خود x را نیز برده و در نتیجه، تعداد بردهای y از x بیشتر است که تناقض است.

۵. ابتدا ثابت می‌کنیم حداکثر توان عدد اول $p \geqslant 2$ در $k!$ برابر $k - 1$ است.

$$\begin{aligned} \text{توان } p \text{ در } k! &= \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^3} \right\rfloor + \cdots \\ &< \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + \frac{k}{p^3} + \cdots = \frac{k}{p-1} \leqslant k \end{aligned}$$

پس توان p در $k!$ حداکثر $k - 1$ است.

حالا اگر $1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$،

$$x^n + \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + \frac{n!}{2!}x^2 + \frac{n!}{1!}x + n! = 0$$

اگر x_0 جواب معادله باشد و $p \mid x_0$، آنگاه توان p در $\frac{n!}{i!}x^i$ از توان p در $n!$ حداقل یکی بیشتر است یعنی در $\frac{x^i}{i!}$ حداقل یک عامل p وجود دارد. پس در هریک از x^n، $\frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}$، ... و $\frac{n!}{1!}x$ حداقل توان p برابر توان p در $n!$ به‌اضافهٔ یک است. یعنی اگر $p^t \mid n!$، هریک از جملات دیگر بر p^{t+1} بخشپذیر است. پس مجموع آنها نیز بر p^{t+1} بخشپذیر است. ولی $n!$ بر p^{t+1} بخشپذیر نیست. تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض اولیهٔ ما اشتباه بوده است.

۶. آشکار است که هر ارتفاع خطی وفادار است. حال اگر d یک خط وفادار باشد، d_1، d_2 و d_3 قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع باشند، P نقطهٔ تقاطع d_1، d_2 و d_3 باشد و M، N و O پاهای عمود از P به سه ضلع مثلث باشند آشکار است که قرینه‌های P نسبت به سه ضلع روی خط d قرار می‌گیرند پس M، N و O روی خطی موازی خط d قرار می‌گیرند. در نتیجه طبق قضیهٔ سِمسون، P روی دایرهٔ

محیطی مثلث قرار می‌گیرد. از طرفی طبق خاصیت خط سیمسون، مجانس خط ONM به مرکز P و نسبت تجانس ۲، از محل تقی ارتفاعات می‌گذرد. پس خطِ وفادار باید از محل تقی ارتفاعات مثلث بگذرد. ونیز به‌راحتی می‌توان نشان داد هر خطی که از محل تقی ارتفاعات مثلث بگذرد خطی است وفادار. حال اگر محل تقی ارتفاعات دو مثلث یکسان باشد، هر خط که از این نقطه بگذرد برای هر دو مثلث وفادار است و در نتیجه تعداد آنها نامتناهی است. و اگر محل تلاقی ارتفاعهای دو مثلث دو نقطهٔ متمایز باشند، فقط خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، می‌تواند برای هر دو وفادار باشد.