

آزمون مرحله‌ی اول هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

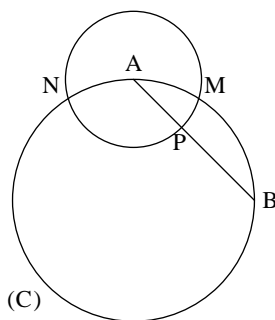
۱. اگر A_1, A_2, \dots, A_n و ... مجموعه‌های دلخواه باشند، مجموعه‌های B_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$B_n = \begin{cases} A_1 & \text{اگر } n = 1 \\ A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i & \text{اگر } n \geq 2 \end{cases}$$

الف) ثابت کنید $B_n \cap B_m = \emptyset$ ($n \neq m$).

ب) ثابت کنید $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

۲. وتر AB از دایره (C) را در نظر می‌گیریم. دایره دیگری به مرکز A و به شعاع کوچکتر از طول AB رسم می‌کنیم تا دایره (C) را در نقاط M و N و وتر AB را در نقطه P قطع کند، ثابت کنید عمودمنصف BP از وسط کمان \widehat{MB} می‌گذرد.



۳. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n, n \geq 5$ ، بر کلیه اعداد $1, 2, \dots, k$ بخشپذیر است به شرط اینکه $k+1$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از n باشد. (می‌دانیم که برای $n \geq 2$ بین n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد).

آزمون مرحله‌ی اول هشتمین دوره المپیاد ریاضی

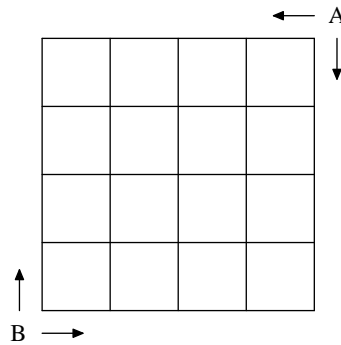
۴. همه اعداد حقیقی x ، y و z را تعیین کنید که در رابطه‌های زیر صادق باشند:

$$x(1+y) = y(1+z) = z(1+x)$$

۵. ثابت کنید در هر مثلث، خطوطی که اوساط اضلاع را به اوساط ارتفاعهای متناظر وصل می‌کنند، متقاربتند [همرسند].

آیا می‌توان به جای ارتفاعها، هر سه خط متقارب [همرس] را در نظر گرفت؟ چگونه؟ ثابت کنید.

۶. در شبکه 4×4 شکل زیر متحرکی از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند به طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. همچنین متحرک دیگری از نقطه B به سمت نقطه A در حرکت است به طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید. اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت نمایند، احتمال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید.



۷. از تساوی زیر $f(x)$ را تعیین کنید.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}, \quad f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x$$

۸. اگر $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ ، $b_i > 0$ و به‌ازای هر k ($1 \leq k \leq n$)،

$$\sum_{j=1}^k a_j \leq \sum_{j=1}^k b_j$$

ثابت کنید که

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$$