

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. فرض کنید $m < n$. داریم

$$B_n = A_n \cap A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_m \cap \dots \cap A'_{n-1}$$

بدیهی است که $B_m \cap B_n = \emptyset$, $B_n \subseteq A_n$ و در نتیجه $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. حال اگر $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، فرض کنید n کوچکترین عدد طبیعی باشد که $x \in A_n$ ، پس $x \in A'_k$ ، $k = 1, 2, \dots, n-1$ ، پس $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و بنابراین،

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

۲. نیمساز زاویه MAP عمود منصف پاره خط MP است. که از وسط کمان MB می‌گذرد. حال در مثلث MNB نیمساز زاویه $\angle MNB$ و عمود منصف ضلع MB یکدیگر را بر دایره محیطی مثلث MNB قطع می‌کنند، که وسط قوس MB است. پس عمود منصفهای دو ضلع MP و MB از مثلث MPB یکدیگر را در وسط قوس MB قطع می‌کنند. در نتیجه عمود منصف ضلع سوم BC نیز از این نقطه می‌گذرد.

۳. واضح است که برای $n = 1, 2, \dots$ داریم $n! \mid j$. حال برای هر $n < j < k+1$ ، j مرکب است، یعنی اعداد طبیعی $a, b \geq 2$ یافت می‌شوند که $j = ab$. چون بین اعداد n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد پس $j < 2n$. ولی اگر $a > n$ ، چون $b \geq 2$ آنگاه $ab > 2n$ و به طریق مشابه برای b ، پس $a \leq n$ و $b \leq n$. حال اگر $a \neq b$ ، آنگاه a و b دو عدد مختلف از اعداد $1, 2, \dots, n$ هستند؛ پس $n! \mid j = ab$. اما اگر هیچ دو عدد متفاوتی مانند a و b وجود نداشته باشند که $j = ab$ ، در این صورت $j = p^2$ که p اول است. اگر $p \geq 4$ آنگاه $p^2 \geq 4p > 2n$ ، یعنی $4p \leq j < 2n$. پس $2p < n$. یعنی هم p و هم $2p$ جزء اعداد $1, 2, \dots, n$ هستند. پس $n! \mid j = p^2$. اگر $p = 3$ آنگاه $j = 9$ و در نتیجه $11 = k+1$. چون بین n و $k+1$ هیچ عددی اول نیست، پس n فقط می‌تواند به صورت 7 یا 8 باشد که در آن صورت $7! \mid 9$ و $8! \mid 9$ و چون $n \geq 5$ پس $5 < j = p^2$ ، یعنی $p > 2$. بنابراین، حالت دیگری امکانپذیر نیست یعنی برای هر j ، $n! \mid j$ و اگر $n = k$ حکم واضح است.

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی

۴. اگر $y = -1$ باشد نتیجه می‌شود $x = -1$ و $z = -1$. فرض کنیم $y \neq -1$. داریم

$$\begin{aligned} x = \frac{y(1+z)}{1+y} &\implies y(1+z) = z\left(1 + \frac{y(1+z)}{1+y}\right) \\ &\implies (y-z)(1+y+yz) = 0 \\ &\implies y-z=0 \text{ یا } 1+y+yz=0 \end{aligned}$$

اگر $y = z$ ، داریم $x = y = z$ و اگر $1+y+yz=0$ خواهیم داشت $y(1+z) = -1$.

$$1+z = \frac{-1}{y} \implies z = \frac{-1}{y} - 1$$

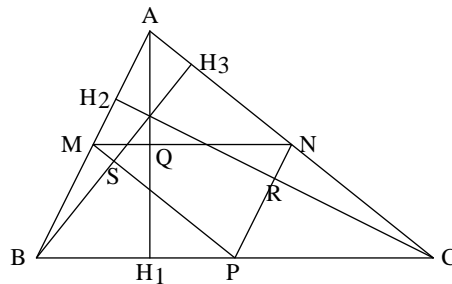
که با فرض $y = \beta$ ، $\beta \in \mathbb{R}$ ، $\beta \neq -1$ و $\beta \neq 0$ نتیجه می‌شود

$$1+x+\beta x=0 \implies x = \frac{-1}{1+\beta}$$

$$y = \beta \text{ و } x = \frac{-1}{1+\beta} \text{ و } z = \frac{-1}{\beta} - 1$$

در صورتی که $y = 0$ باشد، به سادگی ثابت می‌شود که $x = z = 0$.

۵. با توجه به شکل



$$\frac{QM}{QN} = \frac{BH_1}{H_1C}$$

$$\frac{RN}{RP} = \frac{AH_2}{H_2B}$$

$$\frac{SP}{SM} = \frac{CH_3}{H_3A}$$

با ضرب طرفین تساوی در یکدیگر و با توجه به این که ارتفاعها متقارند، بنا بر قضیه سوا حاصلضربهای طرف دوم یک و از آنجا بنا بر عکس قضیه سوا خطوط NS ، PQ و MR هم‌رسند.

در حالت کلی اگر به جای ارتفاعها سه خط هم‌رس در نظر بگیریم، کافی است به جای H_1 ، H_2 و H_3 محل تلاقی خطوط سه‌گانه را با اضلاع مثلث، جایگزین کنیم.

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی

۶. این دو متحرک فقط روی قطر عمود بر AB می‌توانند به هم برخورد کنند. تعداد حرکت‌های ممکن $۱۶ \times ۱۶ = ۲۵۶$ است. حالات مساعد به موارد زیر امکانپذیر است.
الف) B چهار مرحله متوالی افقی و A چهار مرحله عمودی را انتخاب کند.

$$\binom{4}{4} \times \binom{4}{0} = 1$$

ب) B سه مرحله افقی و یک مرحله عمودی و A سه مرحله عمودی و یک مرحله افقی انتخاب کند.

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{3} = 16$$

ج) B دو مرحله افقی و دو مرحله عمودی و A دو مرحله عمودی و دو مرحله افقی انتخاب کند.

$$\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 36$$

د) B یک مرحله افقی و سه مرحله عمودی و A یک مرحله عمودی و سه مرحله افقی انتخاب کند.

$$\binom{4}{3} \times \binom{4}{1} = 16$$

ه) B هر چهار مرحله را عمودی و A هر چهار مرحله را افقی انتخاب کند.

$$\binom{4}{0} \times \binom{4}{4} = 1$$

پس

$$p = \frac{1 + 16 + 36 + 16 + 1}{256} = \frac{70}{256}$$

۷. با فرض $y = \frac{x-1}{x+1}$ داریم $x = \frac{1+y}{1-y}$ و $-\frac{1}{x} = \frac{y-1}{y+1}$ ، $-\frac{1}{y} = \frac{1+x}{1-x}$ و از آنجا

$$f(y) + f\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + f\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1+y}{1-y} \quad (1)$$

با فرض $y = \frac{1+x}{1-x}$ داریم $x = \frac{y-1}{y+1}$ ، $-\frac{1}{x} = \frac{1+y}{1-y}$ و $-\frac{1}{y} = \frac{x-1}{x+1}$ و از آنجا

$$f\left(-\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + f(y) = \frac{y-1}{y+1} \quad (2)$$

و با فرض $y = -\frac{1}{x}$ داریم $x = -\frac{1}{y}$ ، $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1+y}{1-y}$ و $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y-1}{y+1}$ و از آنجا

$$f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + f(y) + f\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = -\frac{1}{y} \quad (3)$$

راه حل آزمون مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد ریاضی

با جمع معادلات (۱)، (۲) و (۳) داریم

$$\begin{aligned} 3f(y) + 2f\left(\frac{y-1}{y+1}\right) + 2f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + 2f\left(-\frac{1}{y}\right) &= \frac{4y}{1-y^2} - \frac{1}{y} \\ \Rightarrow 3f(y) + 2y &= \frac{5y^2 - 1}{y(1-y^2)} \\ \Rightarrow f(y) &= \frac{2y^4 + 3y^2 - 1}{3y(1-y^2)} \end{aligned}$$

۸. فرض کنیم که $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0$ و قرار دهیم

$$\forall k \leq n, \quad S_k = \sum_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

آنگاه $b_n - a_n = S_n - S_{n-1}$ و \dots ، $b_2 - a_2 = S_2 - S_1$ ، $b_1 - a_1 = S_1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) a_i &= S_1 a_1 + (S_2 - S_1) a_2 + \dots + (S_n - S_{n-1}) a_n \\ &= S_1 (a_1 - a_2) + S_2 (a_2 - a_3) + \dots + S_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + S_n a_n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

یعنی $\sum_{i=1}^n b_i a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i^2$. به همین شکل $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) b_i \geq 0$ و در نتیجه

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i^2$$