

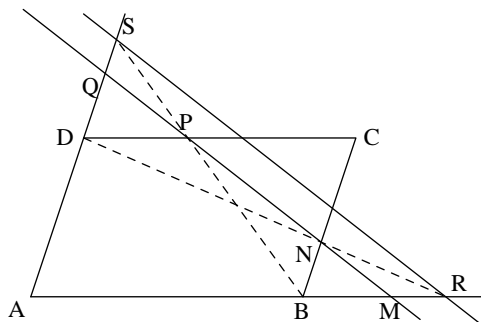
# آزمون مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  داده شده است، خط  $\Delta$  خطوط  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  و  $DA$  را به ترتیب در نقاط  $M$ ،  $N$ ،  $P$  و  $Q$  قطع می‌کند. اگر محل برخورد  $AB$  و  $DN$  را  $R$  و محل برخورد  $AD$  و  $BP$  را  $S$  بنامیم، ثابت کنید که

$$RS \parallel \Delta$$



۲. جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ زیر را به دست آورید.

$$(x^2 - x)(x^2 - 2x + 2) = y^2 - 1$$

۳. الف) ثابت کنید به ازای هر  $n \geq 1$  داریم

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

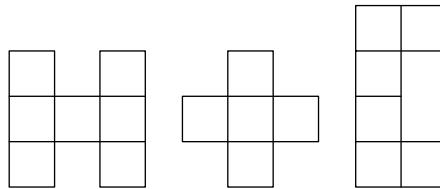
ب) برای مجموعه  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  که در آن  $n \geq 1$ ، زیرمجموعه‌های ناتهی  $X$  را  $A_k$ ،  $k = (1, 2, 3, \dots, m)$  می‌نامیم. (بدیهی است که  $m = 2^n - 1$ ). اگر حاصلضرب تمام عضوهای مجموعهٔ

# آزمون مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی

$A_k$  را با  $a_k$  نشان دهیم، ثابت کنید که

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_i \times j^2} < 2n + 1$$

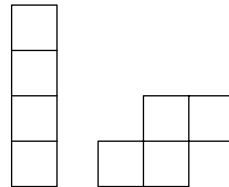
۴. مجموعه مثلثهای  $ABC$  را در نظر می‌گیریم که در دایره‌ای به شعاع  $R$  محاطند، در چه صورت  $AB^2 + AC^2 + BC^2$  ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را حساب کنید. همچنین مجموعه چهاروجهیهای  $ABCD$  را که در کره‌ای به شعاع  $R$  محاط باشند در نظر می‌گیریم؛ در چه صورت مجموع مربعات ۶ یال آنها ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را نیز محاسبه کنید و ثابت کنید در این حالت وجوه با هم برابرند.
۵. اگر  $\alpha$  ریشه معادله  $x^3 - 5x + 3 = 0$  و  $f(x)$  یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا باشد، نشان دهید که هرگاه  $[f(\alpha)]$  ریشه معادله درجه سوم بالا باشد، آنگاه  $f(f(\alpha))$  نیز ریشه معادله خواهد بود.
۶. می‌خواهیم زمینی مستطیل شکل به ابعاد  $5 \times 137$  را با موزاییک‌هایی به اشکال زیر فرش کنیم. نشان دهید این عمل امکانپذیر نیست.



شکل ۳

شکل ۲

شکل ۱



شکل ۵

شکل ۴

«در پنج شکل فوق هر یک از مربعها به ضلع واحد است.»