حل مسائل مرحله‌ی دوم هشتمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۶۹

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. مثلث AMQ را با موربهای DNR و BPS قطع می‌دهیم؛ خواهیم داشت

$$\frac{RA}{RM} \times \frac{NM}{NQ} \times \frac{DQ}{DA} = ۱, \quad \frac{SA}{SQ} \times \frac{PQ}{PM} \times \frac{BM}{BA} = ۱$$

و از مساوی قرار دادن آنها نتیجه می‌شود

$$\frac{RA}{RM} \times \frac{NM}{NQ} \times \frac{DQ}{DA} = \frac{SA}{SQ} \times \frac{PQ}{PM} \times \frac{BM}{BA} \qquad (۱)$$

چون $BN \parallel AQ$ و $AB \parallel DP$، پس

$$\begin{cases} \dfrac{NM}{NQ} = \dfrac{BM}{BA} \\ \dfrac{DQ}{DA} = \dfrac{PQ}{PM} \end{cases} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت $\frac{RA}{RM} = \frac{SA}{SQ}$ یعنی $RS \parallel \Delta$.

۲. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود $y \geqslant ۰$ می‌گیریم.
حال اگر قرار دهیم $x = X + ۱$ خواهیم داشت

$$(X^۲ + X)(X^۲ + ۱) = y^۲ - ۱$$
$$\Longrightarrow \left(X^۲ + \frac{X}{۲} + \frac{X}{۲}\right)\left(X^۲ + \frac{X}{۲} + ۱ - \frac{X}{۲}\right) = y^۲ - ۱$$
$$\Longrightarrow \left(X^۲ + \frac{X}{۲}\right)^۲ = y^۲ - \left(\frac{۳}{۴}X^۲ + X + ۱\right)$$

با توجه به اینکه $\frac{3}{4}X^2+X+1>0$ پس $y > X^2+\frac{X}{2}$ و نتیجه می‌گیریم که $y \geqslant X^2+\frac{X}{2}+\frac{1}{2}>0$ (y عدد صحیح است). بنابراین،

$$\begin{aligned} y^2 &\geqslant X^4+\frac{X^2}{4}+\frac{1}{4}+X^3+X^2+\frac{X}{2} \\ &= y^2+\frac{1}{4}(X^2-2X-3) \end{aligned}$$

در نتیجه، $X^2-2X-3 \leqslant 0$ پس $-1 \leqslant X \leqslant 3$ و بنابراین فقط $X=0,-1,3$ در معادلهٔ سیالهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$\begin{aligned} x &= 0, 1, 4 \\ y &= \pm 1, \pm 1, \pm 11 \end{aligned}$$

۳. الف) داریم

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \quad (k>1)$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$$

$$1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$$

پس

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

پس

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{n}$$

بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2$$

ب) از آنجا که $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}$ مجموع همهٔ $1\big/\left(\prod_{x\in A_i} x\right)$ هاست، پس همهٔ کسرهایی به شکل $1/(b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_k)$ که در آنها b_iها اعضای مختلف مجموعهٔ X هستند، در آن ظاهر می‌شوند. می‌توان این اعداد را اینگونه شمرد که بگوییم هر $1 \leqslant i \leqslant n$ یا ظاهر می‌شود که باعث ضرب‌شدن عدد قبلی در $\frac{1}{i}$ می‌گردد ویا ظاهر نمی‌شود که دارای همان مجموع قبلی است. پس اضافه‌شدن هر i، مجموع قبلی را $1+\frac{1}{i}$ برابر می‌کند؛ البته با این روش ما حالتی را که هیچ iای در مخرج نباشد یعنی ۱ را نیز

می‌شماریم که باید از مجموع کل کم شود. پس داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i} &= \left(۱+\frac{۱}{۱}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\cdots\left(۱+\frac{۱}{n}\right)-۱ \\ &= \frac{۲}{۱}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}\times\cdots\times\frac{n+۱}{n}-۱ \\ &= \frac{n+۱}{۱}-۱=n\end{aligned}$$

چون $\sum_{j=۱}^{m} \frac{۱}{j^۲} < ۲$ و $\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i} = n$ پس

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i \times j^۲} \sum_{j=۱}^{m} \frac{۱}{j^۲} \sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i} < ۲n$$

بنابراین

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i \times j^۲} < ۲n+۱$$

۴. اگر P نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ مثلث باشد، آنگاه

$$PA^۲+PB^۲+PC^۲ = \frac{AB^۲+AC^۲+BC^۲}{۳}+۳PG^۲$$

که G محل تلاقی میانه‌هاست. حال اگر مرکز دایره را O بگیریم،

$$OA^۲+OB^۲+OC^۲-۳OG^۲ = \frac{۱}{۳}(AB^۲+AC^۲+BC^۲)$$

بدیهی است که $AB^۲+BC^۲+AC^۲$ وقتی ماکزیمم است که $OG=۰$ یعنی مرکز دایره بر محل تلاقی میانه‌ها منطبق باشد. پس

$$OA^۲+OB^۲+OC^۲=۳R^۲ \Longrightarrow AB^۲+AC^۲+BC^۲=۹R^۲$$

همچنین اگر P نقطه‌ای دلخواه در فضا و $ABCD$ یک چهاروجهی دلخواه باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}&PA^۲+PB^۲+PC^۲+PD^۲ = \\ &\qquad ۴PG^۲+\frac{۱}{۴}(AB^۲+AC^۲+AD^۲+BD^۲+BC^۲+CD^۲)\end{aligned}$$

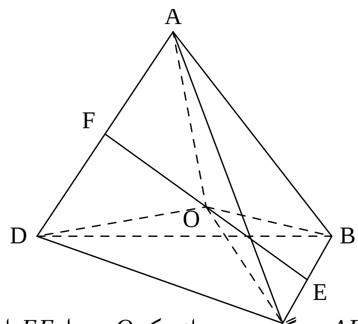
در نتیجه اگر P مرکز کره اختیار شود،

$$\sum_{X\in\{A,B,C,D\}} OX^۲ = ۴OG^۲+\frac{۱}{۴}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^۲$$

یا

$$۴R^۲-۴OG^۲ = \frac{۱}{۴}\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^۲$$

وقتی مقدار $\sum_{X,Y\in\{A,B,C,D\}} XY^{۲}$ ماکزیمم است که $OG^{۲}$ مینیمم باشد یعنی G بر O منطبق باشد. پس باید مرکز ثقل چهاروجهی بر مرکز کره منطبق گردد. در این صورت ماکزیمم $\sum XY^{۲}$ برابر $۱۶R^{۲}$ خواهد بود.



E و F را وسطهای BC و AD می‌گیریم. می‌دانیم که O وسط EF است. چون مثلثهای BOC و AOD متساوی‌الساقیند پس OE و OF که ارتفاعهای نظیر قاعده‌های آنها هستند نیز برابرند؛ در نتیجه، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OEC و OFD برابرند. پس $CE = DF$ یعنی $BC = DA$. پس یالهای روبه‌رو برابرند و به عبارت دیگر وجوه با هم برابرند.

۵. معادلهٔ $x^{۳} - ۵x + ۳ = ۰$ ریشهٔ گویا ندارد پس قابل تجزیه نیست. در نتیجه، α در هیچ معادله‌ای با ضرایب گویا و از درجهٔ کمتر از ۳ صادق نخواهد بود. حال اگر معادلهٔ

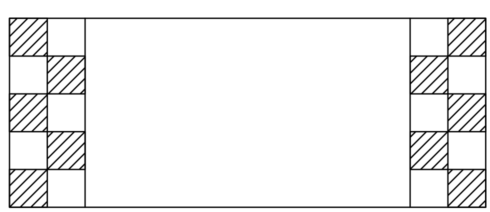
$$f(x)^{۳} - ۵f(x) + ۳ = ۰$$

را در نظر بگیریم، طبق فرض α ریشه این معادله نیز هست. در نتیجه،

$$f(x)^{۳} - ۵f(x) + ۳$$

بر $x^{۳} - ۵x + ۳$ بخشپذیر است. یعنی تمام ریشه‌های معادلهٔ $x^{۳} - ۵x + ۳ = ۰$ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)^{۳} - ۵f(x) + ۳ = ۰$ نیز خواهند بود. پس $f(\alpha)$ نیز ریشهٔ معادلهٔ اخیر است یعنی $f\big(f(\alpha)\big)^{۳} - ۵f\big(f(\alpha)\big) + ۳ = ۰$. در نتیجه $f\big(f(\alpha)\big)$ ریشهٔ معادلهٔ $x^{۳} - ۵x + ۳ = ۰$ خواهد بود.

۶. فرض می‌کنیم که مستطیل مورد نظر با شکلهای ۱ تا ۵ پوشانده شده باشد. خانه‌های مستطیل را یک در میان سیاه و سفید می‌کنیم.



از آنجا که تعداد مربعها فرد است پس تفاضل سیاه‌ها با سفیدها برابر ۱ خواهد بود. شکلهای ۱، ۴ و ۵ دارای رنگهای سیاه و سفید مساوی هستند. در مورد شکل ۲، یا چهار سفید و یک سیاه داریم یا برعکس، در مورد شکل ۳، یا پنج سیاه و دو سفید داریم یا برعکس. حال فرض کنیم که

$x_۱ =$ تعداد شکل ۲ با چهار خانهٔ سفید و یک خانهٔ سیاه

$x_۲ =$ تعداد شکل ۲ با چهار خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید

$x_۳ =$ تعداد شکل ۳ با پنج خانهٔ سفید و دو خانهٔ سیاه

$x_۴ =$ تعداد شکل ۳ با پنج خانهٔ سیاه و دو خانهٔ سفید

با توجه به اینکه

۱ = تعداد مربعهای سفید − تعداد مربعهای سیاه

و اینکه شکلهای ۱، ۴ و ۵ در طرف دوم حذف می‌شوند، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} ۱ &= (۴x_۲ + x_۱) + (۲x_۳ + ۵x_۴) - (۴x_۱ + x_۲) - (۵x_۳ + ۲x_۴) \\ &= -۳x_۱ + ۳x_۲ - ۳x_۳ + ۳x_۴ \end{aligned}$$

با توجه به اینکه طرف دوم بر ۳ بخشپذیر است، به‌تناقض رسیده‌ایم.