

آزمون مرحله‌ی اول نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت کنید بینهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آنها کمترین مقدار ممکن (مثبت) باشد.

۲. همه اعداد طبیعی a ، b و c بزرگتر از یک را بیابید که حاصلضرب هر دو عدد از آنها به علاوه یک، مضرب سومی گردد.

۳. اگر برای تابع حقیقی غیر ثابت f داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2f(xy)$$

آنگاه $f(1370)$ را به دست آورید.

۴. خط (L) دو خط (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. از نقطه P واقع بر (L) خطی رسم کنید که (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A' و B' قطع کند، به طوری که $\frac{AA'}{BB'} = K$.

۵. اگر $0 < z \leq y \leq x$ ، $(x, y, z \in \mathbb{R})$ ثابت کنید که

$$\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

۶. ۵۵ عدد دلخواه از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید که همواره می‌توان دو عدد بین اعداد انتخاب‌شده یافت به طوری که تفاضل آنها ۱۰ باشد.