راه حل آزمون مرحله‌ی اول نهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. **روش اول.** اگر $A(x_۱, y_۱)$، $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ مختصات سه رأس مثلث باشند، می‌دانیم مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

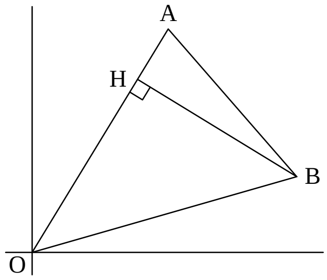
که منظور از $|A|$ قدرمطلق دترمینان ماتریس A است. در نتیجه، کمترین مقدار ممکن S عدد $\frac{۱}{۲}$ است. حال نشان می‌دهیم بینهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت همهٔ آنها $\frac{۱}{۲}$ است. اگر قرار دهیم $A(m,n)$ و $\gcd(m,n) = ۱$[1]؛ و r و s اعداد طبیعی باشند به طوری که $ms - nr = ۱$، آنگاه با قرار دادن $B(r,s)$ مثلث AOB دارای مساحت $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود، زیرا

$$BH = \frac{|ms-nr|}{\sqrt{m^۲+n^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{m^۲+n^۲}}, \quad OA = \sqrt{m^۲+n^۲}$$

پس

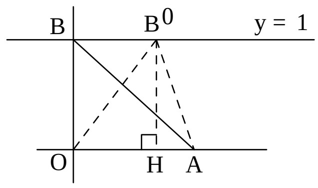
$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲} OA \cdot BH = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه، برای هر زوج (m,n) که $\gcd(m,n) = ۱$ باشد مثلثی با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آن $\frac{۱}{۲}$ است.



[1] بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n

روش دوم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB را که در آن $OA = OB = 1$ و $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم. حال اگر روی خط $y = 1$ نقاطی با طول صحیح اختیار کنیم، این نقاط با O و A مثلثهایی می‌سازند که مساحت همه آنها $\frac{1}{2}$ است.



۲.

$$\begin{cases} ab+1 = kc \\ ac+1 = k'b \\ bc+1 = k''a \end{cases} \qquad (1)$$

حالا

$$\begin{aligned} (ab+1)(ac+1)(bc+1) &= kk'k''abc \\ &\Longrightarrow mabc+ab+ac+bc+1 = kk'k''abc \\ &\Longrightarrow ab+bc+ca+1 = nabc \\ &\Longrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc} = n \end{aligned}$$

اگر $a > 3$، $b > 3$ و $c > 3$، آنگاه

$$\text{طرف اول} \leqslant \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{64} < 1$$

پس اقلاً یکی از عددها باید کوچکتر یا مساوی ۳ باشد مثلاً اگر $a = 2$، آنگاه،

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2bc} = n > 0$$

اگر $c > 4$ و $b > 4$ باشد طرف اول کوچکتر از ۱ می‌شود پس یکی از آنها کوچکتر یا مساوی ۴ است. مثلاً $b \leqslant 4$. ضمناً از رابطه‌های (۱) نتیجه می‌گیریم که a، b و c دوبه‌دو نسبت به هم اولند. پس $b = 3$ و

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}+\frac{1}{6c} = n &\Longrightarrow \frac{7}{6c} = n-\frac{5}{6} \\ &\Longrightarrow 7 = c(6n-5) \end{aligned}$$

c عدد ۷ را می‌شمارد پس $c = 7$ و مجموعهٔ $\{2,3,7\}$ به‌دست می‌آید. اگر $a = 3$ را در نظر بگیریم

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{3bc} = n \geqslant 0$$

در اینجا نیز اگر $b > ۴$ و $c > ۴$ باشد طرف اول کوچکتر از ۱ می‌شود پس یکی از آنها کوچکتر یا مساوی ۴ است مثلاً $b \leqslant ۴$. و چون a و b نسبت به هم اولند پس $b = ۲$ یا $b = ۴$. از $b = ۲$ مجدداً جواب قبلی به‌دست می‌آید و از $b = ۴$ داریم

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{۱۲c} = n$$

پس

$$\frac{۱۳}{۱۲c} + \frac{۷}{۱۲} = n$$

چون $a = ۳$ و $b = ۴$ پس c باید نسبت به ۲ و ۳ اول باشد، پس c حداقل مساوی ۵ است و با این فرض طرف اول تساوی کوچکتر از ۱ می‌شود که غیر ممکن است. پس تنها جواب مسأله $\{۲,۳,۷\}$ است.

۳.

$$f(a+b) = f(a) + f(b) - ۲f(ab)$$
$$f(۰) = f(۰+۰) = f(۰) + f(۰) - ۲f(۰) = ۰$$

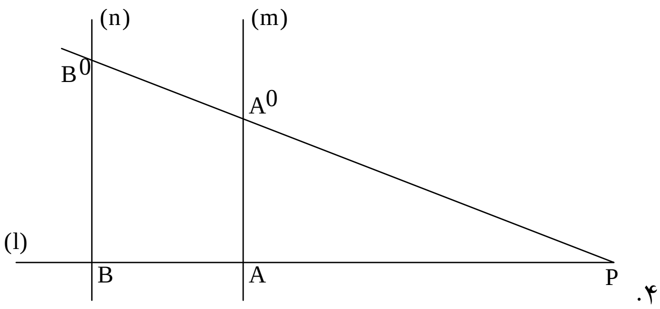
پس $f(۰) = ۰$.

$$f(n+۱) = f(n) + f(۱) - ۲f(n) = f(۱) - f(n)$$

پس

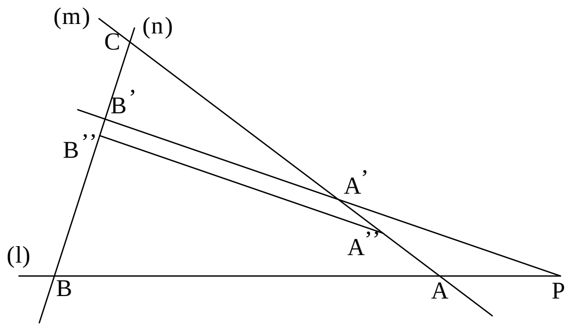
$$\begin{aligned} f(۱) &= f(۱) \\ f(۲) &= f(۱) - f(۱) = ۰ \\ f(۳) &= f(۱) - f(۲) = f(۱) \\ f(۴) &= f(۱) - f(۳) = ۰ \end{aligned}$$

و با استقرا می‌توان ثابت کرد $f(۲n) = ۰$ و $f(۲n+۱) = f(۱)$، در نتیجه $f(۱۳۷۰) = ۰$.



۴.

واضح است اگر $(n) \parallel (m)$ باشد آنگاه مسأله وقتی دارای جواب است که $K = \frac{PA}{PB}$. در این حالت هر خطی که از P بگذرد و (m) و (n) را قطع کند جواب مسأله است. در حالتی که $K \neq \frac{PA}{PB}$ مسأله جواب ندارد.



حال فرض می‌کنیم که (m) و (n) متقاطع باشند و $(m)\cap(n)=\{c\}$. در مثلث ABC بنابر قضیهٔ منلائوس داریم

$$\frac{A'A}{A'C}\times\frac{B'C}{B'B}\times\frac{PB}{PA}=۱$$

و یا

$$\frac{B'C}{A'C}=\frac{PA}{PB}\times\frac{۱}{K}=K'$$

پس کافی است نقاط B'' و A'' را به ترتیب روی CB و CA به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{B''C}{A''C}=K'$ باشد و آنگاه از P خطی به موازات $A''B''$ رسم کنیم. در این حالت مسأله یک جواب دارد.

۵. باید ثابت کنیم که

$$x^۲\left(\frac{y}{z}\right)+y^۲\left(\frac{z}{x}-۱\right)+z^۲\left(\frac{x}{y}-۱\right)>۰$$

اگر $a=\frac{y}{z}-۱$، $b=\frac{z}{x}-۱$ و $c=\frac{x}{y}-۱$ بنابر نامساوی حسابی-هندسی داریم

$$a+b+c\geqslant ۰$$

حال ثابت می‌کنیم که

$$ax^۲+by^۲+cz^۲\geqslant ۰$$

چون $c\geqslant -a-b$ بنابراین،

$$ax^۲+by^۲+cz^۲\geqslant ax^۲+by^۲-az^۲-bz^۲$$

حال نشان می‌دهیم که

$$ax^۲+by^۲-az^۲-bz^۲\geqslant ۰$$
$$a(x^۲-z^۲)+b(y^۲-z^۲)\geqslant ۰$$
$$\frac{y-z}{z}(x^۲-z^۲)+\frac{z-x}{x}(y^۲-z^۲)\geqslant ۰$$
$$\frac{x+z}{z}-\frac{y+z}{x}\geqslant ۰$$

(در مرحلهٔ آخر $(x-z)(y-z)$ را از طرفین ساده کرده‌ایم.) چون $x+z \geqslant y+z$ و $\frac{1}{z} \geqslant \frac{1}{x}$ بنابراین،

$$\frac{x+z}{z} \geqslant \frac{y+z}{x}$$

یعنی $\frac{x+z}{z} - \frac{y+z}{x} \geqslant ۰$. پس

$$ax^۲ + by^۲ + cz^۲ \geqslant ۰$$

۶. اگر در مجموعهٔ

$$\{a, a+۱, \ldots, a+۲n-۱\}$$

$n+۱$ عدد انتخاب کنیم، تفاضل دوتای آنها n است. برای اثبات زوجهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$(a, a+n), (a+۱, a+n+۱), \ldots, (a+n-۱, a+۲n-۱)$$

و اصل لانه کبوتری را به کار می‌بریم. حال اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به ۵ دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}, \quad \{۲۱, ۲۲, \ldots, ۴۰\}, \quad \{۴۱, ۴۲, \ldots, ۶۰\}$$
$$\{۶۱, ۶۲, \ldots, ۸۰\}, \quad \{۸۱, ۸۲, \ldots, ۱۰۰\}$$

واضح است که از میان ۵۱ عدد باید یازده‌تای آنها از یکی از این دسته‌ها انتخاب شوند و با آنچه که در بالا گفتیم اثبات تمام است.