

آزمون مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. ثابت کنید معادله $x + x^2 = y + y^2 + y^3$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت جواب ندارد.

۲. چهاروجهی $ABCD$ داده شده است.

الف) اگر صفحه‌ای مانند (P) این چهاروجهی را قطع کند، شرط لازم و کافی برای اینکه مقطع حاصل متوازی‌الاضلاع گردد چیست؟ نشان دهید در این صورت مسأله دارای سه دسته جواب است.

ب) اکنون یکی از این سه دسته جواب را در نظر می‌گیریم. وضع صفحه (P) را چگونه باید انتخاب کرد تا مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل ماکزیمم گردد.

ج) صفحه (P) را به گونه‌ای اختیار کنید که مقطع حاصل لوزی گردد و در این صورت اندازه ضلع لوزی را بر حسب اندازه‌های یالهای چهاروجهی به دست آورید.

۳. فرض می‌کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده است، $f(1) = 1$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

و برای $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ داریم $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$. همه توابع $f(x)$ را به دست آورید.

۴. نشان دهید حداقل شش نقطه با مختصات گویا روی منحنی

$$y^2 = x^3 + x + 1370$$

وجود دارد.

۵. مثلث ABC در دایره (C) محاط است. نیمسازهای درونی زوایای مثلث مزبور دایره (C) را مجدداً در A' ، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I نقطه برخورد نیمسازها باشد ثابت کنید که

$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} \geq 3$$
$$IA' + IB' + IC' \geq IA + IB + IC$$

۶. سه گروه A ، B و C از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف در (یک) کنفرانس گرد آمده‌اند. می‌خواهیم جلسات سه نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به طوری که از هر گروه فقط یک نفر شرکت داشته باشد و هر دو نفر دقیقاً در یک جلسه (با هم) شرکت کرده باشند.

آزمون مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی

- الف) اگر این عمل امکانپذیر باشد نشان دهید تعداد افراد هر سه گروه مساویند.
ب) در حالتی که تعداد افراد هر گروه سه باشد نشان دهید این عمل امکانپذیر است.
ج) ثابت کنید در حالت کلی تساوی تعداد اعضای سه گروه، این عمل امکانپذیر است.