حل مسائل مرحله‌ی دوم نهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۰

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. فرض می‌کنیم $a = (y, x-y)$؛ بنابراین،

$$y = ba,\ \ x - y = ca,\ \ (b, c) = 1$$

در نتیجه،

$$ab + ac + a^2b^2 + a^2c^2 + 2a^2bc = ab + a^2b^2 + a^3b^3$$

اگر $a = 0$، آنگاه $x = y = 0$ که خف فرض مثبت بودن x و y است. اگر $a \neq 0$، آنگاه $c + ac^2 + 2abc = a^2b^3$. پس $c \mid a^2b^3$، یعنی $c \mid a^2$. پس $a^2 = dc$ و بنابراین،

$$1 + ac + 2ab = db^3$$

در نتیجه $(d, a) = 1$. اما $a^2 = dc$ و اگر $d \neq 1$ باشد آنگاه $(d, a) \neq 1$. پس $d = 1$ و $c = a^2$.

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 2ab = b^3 \\ c = a^2 \Longrightarrow (b, a^2) = 1 \end{cases}$$

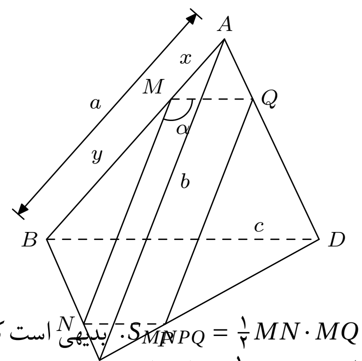
پس $(a, b) = 1$. از $b^3 = 1 + a^3 + 2ab$ نتیجه می‌شود $b > a$ و

$$(b-a)\big((b-a)^2 + 3ab\big) = 1 + 2ab$$

$$\left.\begin{aligned} b - a &= s \\ ab &= p \end{aligned}\right\} \Longrightarrow s(s^2 + 3p) = 1 + 2$$

اما $a, b \neq 1$ و در نتیجه $p > 1$ و بنابراین، $1 + 2p < 3p$؛ در نتیجه، تساوی فوق نمی‌تواند برقرار باشد.

۲. الف) فرض می‌کنیم $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع باشد در این صورت $MQ \parallel NP$ و چون $NP \subset BCD$ پس $MQ \parallel BD$ (چرا؟) و به دلیل مشابه $MN \parallel AC$ یعنی صفحهٔ (p) با دو یال AC و BD موازی است. به عکس اگر (p) با دو یال AC و BD موازی باشد به سهولت ثابت می‌شود که $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.



ب) اکنون می‌نویسیم $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MN \cdot MQ \sin\alpha$. بدیهی است که چون α ثابت است (زاویهٔ بین دو یال متنافر AC و BD) پس $\frac{1}{2}\sin\alpha$ مقداری است ثابت و در نتیجه باید $MN \cdot MQ$ ماکزیمم گردد. داریم

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BD} \qquad \frac{x}{a} = \frac{MQ}{c} \qquad MQ = \frac{cx}{a}$$
$$\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC} \qquad \frac{y}{a} = \frac{MN}{b} \qquad MN = \frac{by}{a}$$

در نتیجه،

$$MN \cdot MQ = \frac{cx}{a} \times \frac{by}{a} = \frac{bcxy}{a^2}$$

چون $x + y = a$، پس ماکزیمم xy در صورتی پیش می‌آید که $x = y$ باشد یعنی M باید وسط AB باشد. در نهایت رأسهای متوازی‌الاضلاع با مساحت ماکزیمم وسطهای AB، BC، CD و DA است.

ج) اگر $MNPQ$ لوزی باشد داریم

$$MN = MQ, \quad \frac{cx}{a} = \frac{by}{a}, \quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$$

یعنی باید نقطهٔ M یال AB را به نسبت $\frac{b}{c}$ تقسیم کند. در این صورت

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}, \frac{x+y}{y} = \frac{b+c}{c}, \frac{a}{y} = \frac{b+c}{c}, y = \frac{ac}{b+c}$$

پس

$$MN = \frac{by}{a} = \frac{b \times \frac{ac}{b+c}}{a} = \frac{bc}{b+c}$$

۳. واضح است که $f(0) = 0$ و $f(n) = n$ (استقرا) و همچنین $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}$ و در نتیجه، به‌ازای هر $r \in \mathbb{Q}$، $f(r) = r$. از طرفی f یک‌به‌یک است زیرا اگر $f(x) = f(y)$ آنگاه،

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x)$$

و در نتیجه، $f(y-x)=0$. حال اگر $y-x=\alpha\neq 0$ آنگاه

$$f(\alpha)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=1$$

و در نتیجه، $1=0$ که تناقض است. بنابراین $y=x$. و همچنین واضح است که $f(-x)=-f(x)$.
حال نشان می‌دهیم که $f(x^2)=f(x)^2$. واضح است که اگر $f(x)=f(x^2)$ آنگاه این رابطه با توجه به یک‌به‌یک بودن f ($x=\{0$ یا $1\}$) برقرار است و اگر $f(x)\neq f(x^2)$، آنگاه داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)-f(x^2)}&=\frac{1}{f(x-x^2)}=\frac{1}{f\big(x(1-x)\big)}\\&=f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right)=f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\\&=f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{1-f(x)}\\&=\frac{1}{f(x)-f(x)^2}\Longrightarrow f(x^2)=f(x)^2\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $x>0$ آنگاه $f(x)>0$ و در نتیجه f صعودی است (چرا؟). حال با توجه به اینکه برای هر x دو دنباله از اعداد گویا مانند r_n و s_n وجود دارد که به‌ازای هر n، $r_n<x<s_n$؛ و x تنها عددی است که در آن نامساوی صدق می‌کند، داریم

$$r_n=f(r_n)<f(x)<f(s_n)=s_n$$

در نتیجه $f(x)=x$.

۴. می‌گیریم $a=1370^{685}$. اگر $x=0$ آنگاه

$$A(0,a),\quad B(0,-a)$$

ضریب زاویهٔ مماس در A برابر است با $y'=\frac{1}{2a}$ پس معادلهٔ مماس در A می‌شود $y=\frac{x}{2a}+a$. محلّ دیگر تقاطعِ مماس با منحنی را می‌یابیم.

$$\left(\frac{x}{2a}+a\right)^2=x^3+x+1370^{1370}$$

پس $x=\frac{1}{4a^2}$ و در نتیجه،

$$C\left(\frac{1}{4a^2},\frac{1+8a^4}{8a^3}\right),\quad D\left(\frac{1}{4a^2},-\frac{1+8a^4}{8a^3}\right)$$

حال خط BC را با منحنی قطع می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که این خط در C بر منحنی مماس نیست پس در یک نقطهٔ E ($E\neq B$) با مختصات گویا منحنی را قطع می‌کنند. زیرا

$$BC\ \text{ضریب زاویهٔ}=\frac{\frac{1+8a^4}{8a^3}+a}{\frac{1}{4a^2}}=\frac{1+16a^4}{2a}$$

$$2yy'=3x^2+1\Longrightarrow y'=\frac{\frac{3}{16a^4}+1}{2\left(\frac{1+8a^4}{8a^3}\right)}=\frac{3+16a^4}{4a(1+8a^4)}$$

که شیب مماس در C است. حال واضح است که

$$\frac{۱+۱۶a^{۴}}{۲a} \neq \frac{۳+۱۶a^{۴}}{۴a(۱+۸a^{۴})}$$

$$۲(۱+۱۶a^{۴})(۱+۸a^{۴}) > ۳+۱۶a^{۴}$$

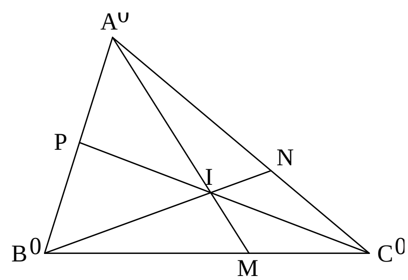
همچنین خط DA به همین دلیل منحنی را در نقطهٔ دیگری مانند F با مختصات گویا قطع می‌کند.

۵. برای هر سه خط همرس داریم

$$\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geqslant ۶ \qquad (۱)$$

زیرا با در نظر گرفتن مساحتها داریم

$$\frac{IM}{MA'}+\frac{IN}{NB'}+\frac{IP}{PC'} = ۱$$



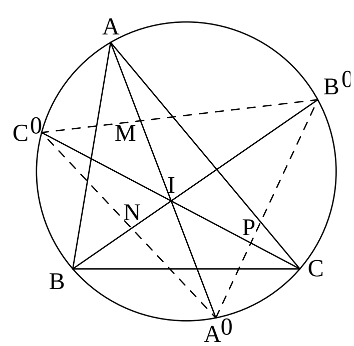
پس بنابر نامساوی کوشی،

$$\frac{A'M}{IM}+\frac{B'N}{IN}+\frac{C'P}{IP} \geqslant ۹$$

و یا

$$\frac{A'I+IM}{IM}+\frac{B'I+IN}{IN}+\frac{C'I+IP}{IP} = ۳+\frac{A'I}{IM}+\frac{B'I}{IN}+\frac{C'I}{IP} \geqslant ۹$$

و در نتیجه رابطهٔ (۱) برقرار است.



M، N و P را وسطهای پاره‌خطهای AI، BI و CI می‌گیریم. با توجه به شکل بدیهی است که $A'C'$ عمودمنصف IB و $A'B'$ عمودمنصف IC و $B'C'$ عمودمنصف IA است. پس

$$\frac{IA'}{IM}+\frac{IB'}{IN}+\frac{IC'}{IP}\geqslant ۶$$

و از آنجا

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geqslant ۳$$

اکنون طبق نامساوی «اردیش-مردل» داریم

$$IA'+IB'+IC'\geqslant ۲(IM+IN+IP)$$

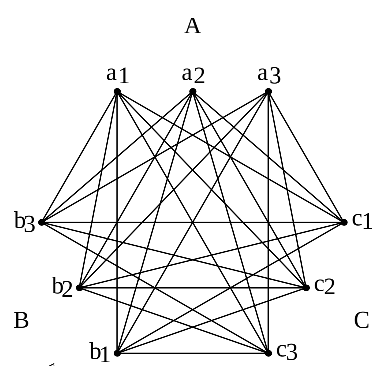
یا

$$IA'+IB'+IC'\geqslant IA+IB+IC$$

۶. فرض کنید دانشمندان مجموعه‌های

$$A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_m\},B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_n\},C=\{c_۱,c_۲,\dots,c_p\}$$

باشند. برای هریک از اعضای مجموعه‌ها نقطه‌ای روی صفحه متناظر می‌کنیم (شکل برای $m=n=p=۳$ نشان داده شده است). اگر یک دانشمند مثلاً a_i با یک دانشمند دیگر مثلاً b_j در یک جلسه شرکت داشته باشد یک خط بین a_i و b_j رسم می‌کنیم. تمام نقاط A را به هریک از نقاط B و C وصل می‌کنیم و همین‌طور هریک از نقاط B را به هریک از نقاط C متصل می‌نماییم. منظور مسأله، افراز خطوط حاصل به مثلثهایی مانند $a_ib_jc_k$ است.



الف) هر مثلث $a_ib_jc_k$ از هر قسمت $\{A,B\}$، $\{B,C\}$ و $\{A,C\}$ دقیقاً یک خط دربر دارد. پس باید تعداد خطوط بین این قسمتها با هم مساوی باشند. پس

$$mn=mp,\quad mn=np$$

یعنی

$$m=n=p$$

ب) مثلثها می‌توانند به صورت زیر باشند

$$a_1 b_1 c_1,\ a_1 b_2 c_2,\ a_1 b_3 c_3,\ \ldots,\ a_3 b_3 c_3$$

جدول زیر بیانگر حل این حالت از مسأله است (a_i و b_j با c_k که از جدول به‌دست می‌آید یک جلسه تشکیل خواهند داد، c_k در ستون a_i و سطر b_j قرار دارد.)

	a_1	a_2	a_3
b_1	c_1	c_2	c_3
b_2	c_2	c_3	c_1
b_3	c_3	c_1	c_2

ج) در حالت کلی نیز کافی است از جدول زیر استفاده کنیم.

	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
b_1	c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_{n-1}	c_n
b_2	c_2	c_3	c_4	$\ldots$	c_n	c_1
b_3	c_3	c_4	c_5	$\ldots$	c_1	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	c_n	c_1	c_2	$\ldots$	c_{n-2}	c_{n-1}

در داخل این جدول در هر سطر هیچ c_i تکرار نشده است و همین طور در هر ستون.

برای هر دو نفر a_i و b_j، c_k را از جدول پیدا کرده و جلسه $a_i b_j c_k$ را تشکیل می‌دهیم.