

آزمون مرحله‌ی اول دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

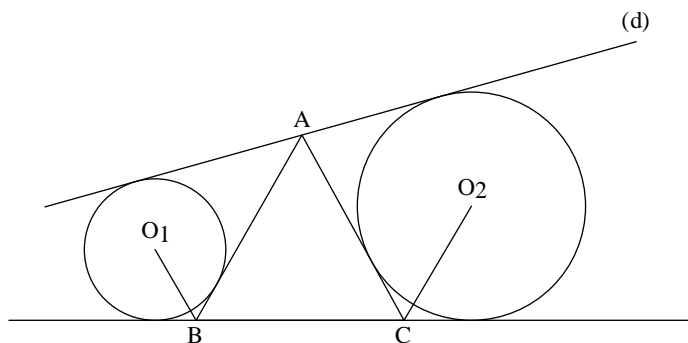
زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. همه جوابهای درست معادله $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{3}{4}$ را به دست آورید.

۲. اگر X یک مجموعه n عضوی باشد آنگاه ثابت کنید تعداد زوجهای (A, B) که A و B زیرمجموعه‌های X هستند و $A \subseteq B$ ، برابر است با $3^n - 2^n$.

۳. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. از نقطه A در بیرون مثلث، خطی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره‌ای باشند که مطابق شکل به ترتیب بر AB ، BC و (d) و همچنین بر AC ، BC و (d) مماسند، آنگاه ثابت کنید که $O_1B + O_2C$ مقداری است ثابت.



۴. در معادله درجه سوم $ax^3 + bx + c = 0$ ضرایب همگی اعداد گویا هستند و می‌دانیم که یکی از ریشه‌های آن با حاصلضرب دو ریشه دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه، عددی گویاست.

۵. همه اعداد اول فرد p را پیدا کنید به گونه‌ای که

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

مربع کامل گردد.

آزمون مرحله‌ی اول دهمین دوره المپیاد ریاضی

۶. در چهارضلعی گوژ $ABCD$ ، نقطه O محل برخورد قطرهایست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند آنگاه ثابت کنید که $PQ \geq \frac{AB+CD}{4}$.

