

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

.۱

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4mn \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} \right) = 3mn$$

$$\Rightarrow 4n + 4m - \frac{4}{n} = 3mn$$

چون طرفین معادله فوق باید صحیح باشند، پس $\frac{4}{n}$ باید عدد صحیح باشد. پس $n = \{\pm 1 \text{ یا } \pm 2, \pm 4\}$.

$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{m} + 1 - \frac{1}{m} = \frac{3}{4}$	امکان ندارد.
$n = -1 \Rightarrow \frac{1}{m} - 1 - \frac{1}{m} = \frac{3}{4}$	امکان ندارد.
$n = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4m} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = 3$	
$n = -2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4m} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{15}{8}$	امکان ندارد.
$n = 4 \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16m} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{15}{8}$	امکان ندارد.
$n = -4 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16m} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{15}{16}$	امکان ندارد.

پس تنها جواب مسأله هنگامی است که $n = 2$ و $m = 3$ باشد.

۲. حالتی را در نظر می‌گیریم که مجموعه B ، i عضوی باشد. در این حالت تعداد حالات مختلف انتخاب B برابر است با $\binom{n}{i}$ و تعداد حالات مختلف انتخاب A برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های محض B یعنی $2^i - 1$. پس تعداد حالات مختلف انتخاب زوج مرتب (A, B) برابر است با $\binom{n}{i}(2^i - 1)$. B می‌تواند ۰، ۱، ... و یا m عضوی باشد. پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (2^i - 1) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی

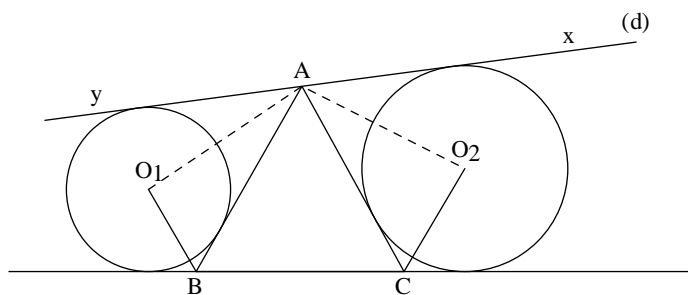
و بنابر بسط دوجمله‌ای خیام می‌دانیم که

$$3^n = (2+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i, \quad 2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\text{تعداد کل حالات} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 3^n - 2^n$$

۳. نقطه M را روی BC به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\angle BAM = \angle O_1AB$ باشد.



در این صورت

$$\begin{aligned} \angle O_2AC &= \frac{1}{2} \angle CAx = \frac{1}{2} (120^\circ - \angle BAy) = 60^\circ - \angle O_1AB \\ \angle MAC &= 60^\circ - \angle BAM \end{aligned}$$

بنابراین $\angle O_2AC = \angle MAC$ است.

$$\left. \begin{aligned} \triangle O_1AB &= \triangle ABM \implies O_1B = BM \\ \triangle O_2AC &= \triangle ACM \implies O_2C = MC \end{aligned} \right\} \implies$$

$$O_1B + O_2C = BM + CM = BC$$

پس مجموع $O_1B + O_2C$ برابر با طول ضلع مثلث ABC است.

۴. فرض می‌کنیم که ریشه‌های این معادله برابر با x_1 ، x_2 و x_3 باشند و داشته باشیم $x_1 = x_2 x_3$. در این صورت، بنابر رابطه‌های بین ضرایب و ریشه‌ها داریم

$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 = -\frac{c}{a} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{b}{a} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی

پس

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 = -\frac{c}{a} &\Rightarrow x_1 \times x_1 = -\frac{c}{a} \\ &\Rightarrow x_1^2 = -\frac{c}{a} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{b}{a} &\Rightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_3 x_1 = \frac{b}{a} \\ &\Rightarrow x_1(1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 0 &\Rightarrow x_2 + x_3 = -x_1 \\ &\Rightarrow x_1(1 - x_1) = \frac{b}{a} \\ &\Rightarrow x_1 - x_1^2 = \frac{b}{a} \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow x_1 - \left(-\frac{c}{a}\right) = \frac{b}{a} \Rightarrow x_1 = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

چون a و b و c اعدادی گویا هستند، x_1 هم گویا می‌شود.

۵.

$$2^{p-1} - 1 = pk^2$$

چون p فرد است، پس می‌توان نوشت $p = 2m + 1$. بنابراین،

$$2^{2m} - 1 = pk^2 \Rightarrow (2^m - 1)(2^m + 1) = pk^2$$

$2^m - 1$ و $2^m + 1$ دو عدد فرد متوالی هستند. بنابراین نسبت به هم اولند و چون حاصلضرب آنها برابر با pk^2 است، پس یکی از آنها باید به صورت مجذور کامل و دیگری باید به صورت حاصلضرب p در یک مجذور کامل باشد یعنی دو حالت زیر پیش می‌آید.

$$\begin{cases} 2^m - 1 = x^2, & 2^m + 1 = py^2 \\ 2^m - 1 = px^2, & 2^m + 1 = y^2 \end{cases}$$

در حالت اول چون $2^m - 1$ عددی فرد است، پس x باید فرد باشد. یعنی $x = 2n + 1$. پس

$$\begin{aligned} 2^m - 1 &= (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \\ &\Rightarrow 2^m = 4n^2 + 4n + 2 = 2(2n^2 + 2n + 1) \\ &\Rightarrow 2^{m-1} = 2(n^2 + n) + 1 \end{aligned}$$

طرف راست این عبارت فرد است؛ بنابراین طرف چپ هم باید فرد باشد؛ ولی تنها توانی از ۲ که عددی فرد است $2^0 = 1$ است. پس باید $m - 1 = 0$ باشد در نتیجه، $m = 1$ و $p = 3$. در حالت دوم هم

راه حل آزمون مرحله‌ی اول دهمین المپیاد ریاضی

به‌طور مشابه می‌توانیم بگوییم که y عددی فرد است پس می‌توانیم بنویسیم $y = 2n + 1$. پس

$$\begin{aligned} 2^m + 1 = y^2 &= (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \\ \implies 2^m &= 4(n^2 + n) \\ \implies 2^{m-2} &= n(n + 1) \end{aligned}$$

یکی از دو عدد n و $n + 1$ فرد است؛ ولی می‌دانیم که 2^{m-2} هیچ عامل فردی جز ۱ ندارد؛ پس باید $n = 1$ باشد. پس

$$n = 1 \implies 2^{m-2} = 2 \implies m = 3 \implies p = 7$$

پس تنها جوابهای مسأله عبارتند از ۳ و ۷.

۶. از P و Q دو عمود بر BD رسم می‌کنیم و پای عمودها را H و H' می‌نامیم. می‌توان گفت

$$PQ \geq HH' = OH + OH' = \frac{1}{4}OD + \frac{1}{4}OB \quad (1)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$PQ \geq \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OC \quad (2)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$2PQ \geq \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD)$$

ولی در مثلثهای OAB و OCD می‌دانیم که $OA + OB \geq AB$ و $OC + OD \geq CD$. بنابراین،

$$2PQ \geq \frac{1}{4}(AB + CD) \implies PQ \geq \frac{1}{4}(AB + CD)$$