

# آزمون مرحله‌ی دوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) نیمسازهای درونی زاویه‌های  $B$  و  $C$  یکدیگر را در نقطه  $I$  و ضلعهای روبرو را به ترتیب در  $D$  و  $E$  قطع می‌کنند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی  $BCDE$  دو برابر مساحت مثلث  $BIC$  است.

۲. دنباله

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-1}^2 \quad (n \geq 1)$$

به طوری که  $a_0 = 1$  و  $a_1 = 2$ ، داده شده است. ثابت کنید که

$$52 < a_{1371} < 65$$

۳. در طرفین رودخانه‌ای چند شهر وجود دارد. چند خط قایقرانی بین این شهرها دایر است. هر خط قایقرانی دقیقاً بین یک شهر از یک سمت رودخانه به یک شهر در سمت دیگر دایر است. از هر شهر دقیقاً به  $k$  شهر در طرف دیگر خط قایقرانی دایر است. اگر بین هر دو شهر بتوان به وسیله این قایقها رفت و آمد کرد، آنگاه ثابت کنید که با حذف هر یک از این خطهای قایقرانی باز هم می‌توان بین هر دو شهر با استفاده از این خطوط قایقرانی، رفت و آمد کرد ( $k > 1$ ).

۴. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $t$ ، عدد

$$A = 1^t + 2^t + \dots + 9^t - 3(1 + 6^t + 8^t)$$

بر ۱۸ بخشپذیر است.

۵. در مثلث  $ABC$  داریم  $\angle A \leq 90^\circ$  و  $\angle B = 2\angle C$ . اگر نیمساز درونی زاویه  $C$  میانه  $AM$  را در نقطه  $D$  قطع کند ( $M$  وسط  $BC$  است)، ثابت کنید که  $\angle MDC \leq 45^\circ$ . با چه شرطی  $\angle MDC = 45^\circ$ ؟

۶. فرض می‌کنیم  $X \neq \emptyset$  یک مجموعه متناهی و  $f: X \rightarrow X$  تابعی باشد که برای هر  $x$  در  $X$ ،  $f^p(x) = x$ ، که در آن  $p$  عددی است اول و ثابت و

$$f^p(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_p(x)$$

اگر  $Y = \{x \in X \mid f(x) \neq x\}$ ، آنگاه ثابت کنید که تعداد عناصر مجموعه  $Y$  بر  $p$  بخشپذیر است.