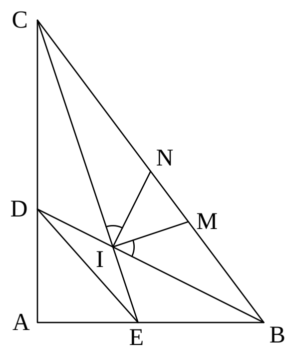
حل مسائل مرحله‌ی دوم دهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۱

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان



۱.

چون BD و CE نیمسازهای $\angle B$ و $\angle C$ هستند پس $\angle BIC = ۱۳۵°$. خطوط IN و IM را چنان می‌سازیم که $\angle CIN = ۴۵°$ و $\angle BIM = ۴۵°$. پس $\angle MIN = ۴۵°$.

به‌سادگی معلوم می‌شود که $\triangle BMI = \triangle BEI$ و $\triangle INC = \triangle IDC$ (زض‌ز) پس

$$S(\triangle IMB) = S(\triangle IEB) \qquad (۱)$$

$$S(\triangle INC) = S(\triangle IDC) \qquad (۲)$$

و نیز

$$\begin{aligned} S(\triangle IMN) &= \frac{IM \cdot IN \cdot \sin(۱۸۰° - ۱۳۵°)}{۲} \\ &= \frac{IE \cdot ID \cdot \sin(۱۳۵°)}{۲} = S(\triangle IED) \end{aligned} \qquad (۳)$$

با جمع طرفین (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$S(\triangle BIC) = S(\triangle IEB) + S(\triangle IDC) + S(\triangle IED)$$

پس

$$۲S(\triangle BIC) = S(\triangle BEDC)$$

۲. قرار می‌دهیم $b_n = a_{n-۱} + \frac{۱}{a_{n-۱}}$. با استقرا ثابت می‌کنیم

$$a_n = b_n \quad \text{و} \quad a_۱ = b_۱ = ۲$$

اگر $a_n = b_n$، پس

$$a_{n+۱} = a_n + \frac{۱}{a_{n-۱} + \frac{۱}{a_{n-۱}}} = a_n + \frac{۱}{a_n}$$
$$b_{n+۱} = \frac{۱}{a_n} + a_n$$

پس $a_{n+۱} = b_{n+۱}$. پس $a_n = a_{n-۱} + \frac{۱}{a_{n-۱}}$. بنابراین از

$$a_{n-۱}^۲ + ۳ > a_{n-۱}^۲ + \frac{۱}{a_{n-۱}^۲} + ۲ > a_{n-۱}^۲ + ۲$$

نتیجه می‌شود

$$a_{i-۱}^۲ + ۳ \geqslant a_i^۲ > a_{i-۱}^۲ + ۲ \qquad (۱)$$

با جمع طرفین نامساوی (۱) برای iهای از ۱ تا n خواهیم داشت

$$۲n + ۱ < a_n^۲ < ۳n + ۲$$

بنابراین،

$$\sqrt{۲n+۱} < a_n < \sqrt{۳n+۲}$$

با قرار دادن $n = ۱۳۷۱$ خواهیم داشت

$$۵۲ < a_n < ۶۵$$

۳. فرض کنید با حذف خط قایقرانیِ بین شهرهای A و B (که در دو طرف رودخانه واقعند) ارتباط بین این شهرها قطع شود. تمام شهرهایی را که بتوان به آنها از A با قایق رفت و آمد کرد، با S نشان می‌دهیم. فرض کنید $n_۱$ عضو از S در آن سمت از رودخانه که A قرار دارد (مثلاً سمت چپ) باشند و $n_۲$ عضو در طرف دیگر؛ پس $B \notin S$. تعداد کل خطوط قایقرانی که از شهرهای سمت چپ از S دایر هستند، مساوی $(n_۱ - ۱)k + (k - ۱)$ و تعداد کل خطوط قایقرانی که از شهرهای سمت راست از S دایر هستند برابر $n_۲ k$ است. پس

$$(n_۱ - ۱)k + (k - ۱) = n_۲ k$$

که امکان ندارد، زیرا طرف راست بر k بخشپذیر است و طرف چپ بر k بخشپذیر نیست.

۴. حکم به‌ازای $t = ۱$ برقرار است. به‌ازای $t > ۱$ داریم

$$\begin{aligned} A &= ۱^t + ۲^t + \cdots + ۹^t - ۳(۱ + ۶^t + ۸^t) \\ &= ۲^t + ۳^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t + ۹^t \\ &\quad - ۲ - ۲ \times ۶^t - ۲ \times ۸^t \end{aligned}$$

که به‌وضوح بر ۲ بخشپذیر است. پس باید نشان بدهیم A بر ۹ بخشپذیر است.
چون $t > ۱$، پس باید نشان دهیم

$$\begin{aligned} A &\equiv ۲^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t - ۲ - ۲ \times ۸^t \\ &\equiv (۷^t + ۲^t) + (۵^t + ۴^t) - ۲(۱ + ۸^t) \pmod{۹} \end{aligned}$$

بر ۹ بخشپذیر است. در حالت t فرد حکم برقرار است. (زیرا $a^t + b^t$ بر $a + b$ بخشپذیر خواهد بود.) اگر t زوج باشد،

$$\begin{aligned} A \equiv ۷(۷^{t-۱} + ۲^{t-۱}) - ۵ \times ۲^{t-۱} + ۵(۵^{t-۱} + ۴^{t-۱}) \\ - ۴^{t-۱} - ۱۶(۸^{t-۱} + ۱) + ۱۴ \pmod{۹} \end{aligned}$$

چون $t - ۱$ فرد است پس عبارات داخل پرانتز بر ۹ بخشپذیر است. بنابراین،

$$\begin{aligned} -A &\equiv ۵ \times ۲^{t-۱} + ۴^{t-۱} - ۱۴ \stackrel{۹}{\equiv} (۲^{t-۱} + ۷)(۲^{t-۱} - ۲) \\ &\equiv (۲^{t+۱} + ۱ + ۶)(۲^{t-۱} - ۲) \pmod{۹} \end{aligned}$$

که بنابر فرد بودن $t - ۱$ خواهیم داشت

$$۲^{t-۱} - ۲ \equiv ۰, ۲^{t-۱} + ۱ + ۶ \equiv ۰ \pmod{۳}$$

پس $-A \equiv ۰$ یا $A \equiv ۰$ پس عدد A هم بر ۹ و هم بر ۲ بخشپذیر است پس بر ۱۸ بخشپذیر است.

۵. در مثلث ADC داریم $\angle MDC = \angle MAC + \frac{۱}{۲}\angle C$. پس

$$۲\angle MDC = ۲\angle MAC + \angle C$$

و چون $\angle AMB = \angle MAC + \angle C$ پس

$$۲\angle MDC = \angle MAC + \angle AMB \qquad (۱)$$

حال نقطهٔ برخورد نیمساز درونی $\angle B$ با AC را E می‌نامیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین خواهد بود. پس EM ارتفاع وارد بر BC خواهد شد. از E عمود EH را بر AB رسم می‌کنیم پس $EH = EM$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ EHA داریم $EA \geqslant EH$. در مثلث AEM خواهیم داشت

$$EA \geqslant EM \Longrightarrow \angle EMA \geqslant \angle MAC$$

پس $MAC \geqslant AMB - ۹۰^\circ$؛ یعنی $۹۰^\circ \geqslant \angle MAC + \angle AMB$ و بنابراین $۹۰^\circ \geqslant ۲\angle MDC$ و $۴۵^\circ \geqslant \angle MDC$.

حالت تساوی $\angle MDC = ۴۵^\circ$ هنگامی برقرار است که $EH = EA$، یعنی $\angle A = ۹۰^\circ$. آنگاه $\angle B = ۶۰^\circ$ و $\angle C = ۳۰^\circ$ خواهد شد.

۶. رابطهٔ $\sim$ را روی X چنین تعریف می‌کنیم $a \sim b \Longleftrightarrow \exists i, f^i(a) = b$. این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است زیرا

الف) $a \sim a$ زیرا $f^p(a) = a$.

ب) اگر $a \sim b$ پس i هست که $f^i(a) = b$. پس

$$f^{p-i}(b) = f^{p-i}\big(f^i(a)\big) = f^p(a) = a$$

و خاصیت تقارنی هم برقرار است.

ج) اگر $a \sim b$ و $b \sim c$ آنگاه i_1 و i_2 هستند که

$$\left.\begin{array}{r} b = f^{i_1}(a) \\ c = f^{i_2}(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow c = f^{i_2}\big(f^{i_1}(a)\big) = f^{i_1+i_2}(a) \Longrightarrow a \sim c$$

پس رابطهٔ فوق ترایایی است.

پس مجموعهٔ X به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌شود. حال می‌گوییم اگر یک دستهٔ هم‌ارزی بیش از یک عضو داشته باشد حتماً p عضو دارد. یعنی باید ثابت کنیم اعضای مجموعهٔ $\{f(a)\ldots, f^p(a)\}$ $(a \neq f(a))$ متمایزند. بنابر برهان خلف اگر چنین نباشد i و j هستند که (می‌توان فرض کرد که $1 \leqslant i \leqslant p$ و $1 \leqslant j \leqslant p$)

$$f^i(a) = f^j(a) \Longrightarrow f^{i-j}(a) = a$$

از طرفی چون $p > j - i \geqslant 1$، پس r و s هستند که $rp + s(j-i) = 1$. در نتیجه $f(a) = f^{rp+s(j-i)}(a) = a$ (که $f(a) \neq a$.) پس تعداد اعضای هر دستهٔ هم‌ارزی بر p بخش‌پذیر است. Z را زیر مجموعه‌ای از Y شامل سردسته‌های این مجموعه‌های p عضوی می‌گیریم. بنابراین

$$Y = \bigcup_{a \in Z} X_a \Longrightarrow |Y| = \sum_{a \in Z} |X_a| \Longrightarrow p \,\big|\, |y|$$