

آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. اگر تفاضل مکعبات دو عدد صحیح و متوالی، توان دوم یک عدد باشد، نشان دهید این عدد برابر حاصلجمع توان دوم دو عدد صحیح و متوالی است.

۲. نقطه P را درون مثلث ABC اختیار می‌کنیم، خطوط راست BP و CP اضلاع روبرو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحتها و هم محیطهای دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند، آنگاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویه A قرار دارد.

۳. تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که برای هر $c \in \mathbb{R}$ معادله $f(x) = c$ دقیقاً سه جواب داشته باشد.

۴. ثابت کنید معادله $3x^2 + 1 = 4y^3$ در اعداد گویا فقط دارای جوابهای $x = \pm 1$ و $y = 1$ است.

۵. مثلث ABC و دایره محیطی آن را در نظر می‌گیریم. از نقاط A, B و C خطوط دلخواهی رسم می‌کنیم تا اضلاع و کمانهای روبرو را به ترتیب در M و M' و N ، N' و P و P' قطع کنند. ثابت کنید اگر حاصل عبارت

$$T = \frac{AM'}{MM'} + \frac{BN}{NN'} + \frac{CP'}{PP'}$$

مینیمم شود، آنگاه سه خط مزبور هم‌رسند. سپس نشان دهید $T \geq 12$.

۶. فرض کنید خانواده $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ که از n مجموعه متمایز ناتهی تشکیل شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از \mathcal{A} دوباره عضوی از \mathcal{A} باشد. اگر

$$|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_n|$$

که $|A_i|$ تعداد اعضای مجموعه A_i است؛ و $|A_1| \leq 2$ ، نشان دهید عضوی مانند x وجود دارد که عضو حداقل $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ تا از این مجموعه‌ها است. ($\lceil a \rceil$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a).