راه حل آزمون مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. برای $n \in \mathbb{Z}$ فرض کنید $(n+1)^3 - n^3 = k^2$. در نتیجه k عددی فرد است ($k = 2m+1$)، ولی داریم

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = k^2$$
$$4(3n^2 + 3n + 1) - 1 = 3(4n^2 + 4n + 1) = 3(2n+1)^2$$

از طرف دیگر،

$$4(3n^2 + 3n + 1) - 1 = 4(2m+1)^2 - 1 = (4m+1)(4m+3)$$

$4m+1$ و $4m+3$ نسبت به هم اولند، پس یکی از آنها مربع کامل است ولی $4m+3$ هیچگاه مربع کامل نیست، پس $4m+1 = (2t+1)^2$. یعنی $2m+1 = t^2 + (t+1)^2$.

۲. فرض کنیم دو مثلث PB_1C و PCB_1 دو مثلثی باشند که دارای مساحتها و محیطهای مساوی هستند، یعنی $S = S'$ و $2p = 2p'$. می‌دانیم که

$$\left.\begin{array}{r} S = pr \\ S' = p'r' \end{array}\right\} \Longrightarrow pr = p'r' \Longrightarrow r = r'$$

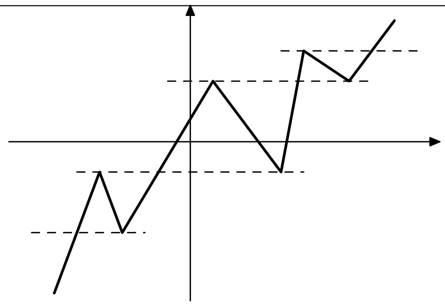
پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PMI و PNJ برابرند در نتیجه $PM = PN$ است.

ولی $PM = p - BC_1$ و $PN = p' - CB_1$ ویا $p - BC_1 = p' - CB_1$ ویا $BC_1 = CB_1$. از طرف دیگر

$$\left.\begin{array}{r} S = \frac{1}{2}BC_1 \cdot h \\ S' = \frac{1}{2}CB_1 \cdot h' \end{array}\right\} \Longrightarrow h = h'$$

یعنی نقطهٔ P از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است. یعنی P روی نیمساز $\angle A$ واقع است.

۳. بدیهی است که باید خط $y = c$ نمودار تابع $y = f(x)$ را دقیقاً در سه نقطه قطع کند.



به همین ترتیب $y=f(x)$ را می‌توان از هر دو طرف ادامه داد.

۴. با تبدیل $u=\frac{۳x-۱}{۲}$ نتیجه می‌شود

$$u^{۲}+u+۱=۳y^{۳}\Longrightarrow (۲+u)^{۳}+(۱-u)^{۳}=(۳y)^{۳}$$

که آخرین قضیهٔ فرما در حالت $n=۳$ است و فقط جوابهای بدیهی $u=۱$ و $u=-۲$ وجود دارد. پس

$$\left.\begin{array}{r} u=۱ \\ u=-۲ \end{array}\right\}\Longrightarrow x=\pm ۱, y=۱$$

۵. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$T=\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}+۳$$

پس T مینیمم است هرگاه

$$\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}$$

مینیمم شود. حال اگر Q پای عمود از M' به BC، M'' وسط کمان BC، Q' پای عمود از M'' به BC و H پای ارتفاع وارد از A به BC باشد، داریم

$$\frac{AM}{MM'}=\frac{AH}{M'Q}\geqslant\frac{AH}{M''Q'}=\frac{AD}{DM''}$$

پس نتیجه می‌گیریم که T وقتی مینیمم است که خطوط فوق‌الذکر نیمسازهای مثلث باشند. اما وقتی این خطوط نیمسازها باشند (یعنی در واقع از اینجا به بعد M پای نیمساز است)، داریم

$$\frac{AM}{MM'}=\frac{AM^{۲}}{MM'\times AM}=\frac{AM^{۲}}{BM\times MC}=\frac{AM^{۲}(b+c)^{۲}}{a^{۲}bc}$$

و می‌دانیم

$$AM^{۲}=bc-BM\times MC=bc-\frac{a^{۲}bc}{(b+c)^{۲}}$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{AM}{MM'}=\left(\frac{b+c}{a}\right)^{۲}-۱$$

به همین ترتیب

$$\frac{BN}{NN'} = \left(\frac{a+c}{b}\right)^{۲} - ۱ \quad \text{و} \quad \frac{CP}{PP'} = \left(\frac{a+b}{c}\right)^{۲} - ۱$$

پس

$$T = \frac{(b+c)^{۲}}{a^{۲}} + \frac{(a+c)^{۲}}{b^{۲}} + \frac{(a+b)^{۲}}{c^{۲}} \geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{(a+b)^{۲}(a+c)^{۲}(b+c)^{۲}}{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}}$$

$$\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{۴ab \times ۴ac \times ۴bc}{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}} = ۱۲$$

۶. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $|A_۱| = ۱$. فرض کنید $A_۱ = \{a\}$، تمام مجموعه‌هایی را که شامل عضو a هستند، با S_a و بقیه را با S'_a نشان می‌دهیم. نشان خواهیم داد که $|S'_a| < |S_a|$. به‌ازای هر $A_i \in S'_a$ می‌توان یک مجموعه در S_a پیدا کرد ($A_i \cup \{a\}$) و غیر از آنها، $A_۱$ نیز در S_a است.

ب) $|A_۱| = ۲$. فرض کنید $A = \{a, b\}$ و

$S_{ab} =$ مجموعه‌هایی که شامل a و b هستند

$S_a =$ مجموعه‌هایی که فقط شامل a هستند

$S_b =$ مجموعه‌هایی که فقط شامل b هستند

$S'_{ab} =$ مجموعه‌هایی که شامل هیچ‌یک از a و b نیستند

به هر $A_i \in S'_{ab}$ مجموعهٔ $A_i \cup \{a, b\}$ در S_{ab} را متناظر می‌کنیم، پس

$$|S_{ab}| \geqslant |S'_{ab}|$$

پس اگر مثلاً $|S_a| \geqslant |S_b|$ باشد آنگاه

$$|S_{ab}| + |S_a| \geqslant |S_b| + |S'_{ab}|$$

در نتیجه تعداد آنهایی که شامل a هستند یعنی $|S_{ab}| + |S_a|$ بزرگتر یا مساوی نصف تعداد کل است.