

# آزمون مرحله‌ی دوم یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر  $p$  عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، آنگاه ثابت کنید عدد  $1 - 6^p - 7^p = A$  بر ۴۳ بخشپذیر است.
۲. مثلث  $ABC$  به اضلاع  $a, b, c$  و مساحت  $S$  داده شده است. اثبات یا رد کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌ای مانند  $P$  درون آن وجود داشته باشد به گونه‌ای که فاصله آن از سه رأس مثلث مزبور به ترتیب  $x, y, z$  باشد، آن است که مثلثی به اضلاع  $a, y, z$  و مساحت  $S_1$ ، مثلثی به اضلاع  $b, x, z$  و مساحت  $S_2$  و مثلثی به اضلاع  $c, x, y$  و مساحت  $S_3$  وجود داشته باشد که  $S_1 + S_2 + S_3 = S$ .
۳. فرض می‌کنیم  $n$  و  $r$  دو عدد طبیعی باشند. کوچکترین عدد طبیعی  $m$  را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشد که برای هر افراز مجموعه  $\{1, 2, \dots, m\}$  به  $r$  زیرمجموعه  $A_1, A_2, \dots, A_r$ ، در یکی از  $A_i$ ها  $(1 \leq i \leq r)$  دو عدد  $a$  و  $b$  پیدا شوند به گونه‌ای که  $1 + \frac{1}{n} \leq \frac{a}{b} < 1$  باشد.
۴. تعداد  $n \geq 2$  نقطه  $A_1, A_2, \dots, A_n$  در صفحه داده شده‌اند به گونه‌ای که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست واقع نیستند و هر دو نقطه  $A_i$  و  $A_j$  یا با پاره‌خط  $A_i A_j$  به هم متصلند و یا نقطه‌ای مانند  $A_k$  وجود دارد که با پاره‌خطهای  $A_i A_k$  و  $A_j A_k$  به این دو نقطه متصل است.  
الف) حداقل تعداد پاره‌خطهای لازم را پیدا کنید.  
ب) در حالتی که  $n = 6$  و  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  یک شش‌ضلعی محدب باشد، حداقل چند پاره‌خط لازم است افزوده شود تا شرایط بالا برقرار گردد.
۵. اگر  $D_1$  و  $D_2$  دو خط متنافر باشند، آنگاه ثابت کنید بینهایت خط راست وجود دارد که [همه] نقاط روی آنها از این دو خط به یک فاصله‌اند.
۶. اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشند به گونه‌ای که کسر  $\frac{f(x)}{g(x)}$  برای بینهایت عدد گویای  $x$  مقداری گویا گردد، آنگاه ثابت کنید  $\frac{f(x)}{g(x)}$  را می‌توان به شکل نسبت دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.