حل مسائل مرحله‌ی دوم یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. چون p عددی اول است پس $p \equiv \pm ۱ \pmod{۶}$.

$$\begin{array}{ll} ۷^{۶} \equiv ۱ \qquad\qquad & ۶^{۶} \equiv ۱ \pmod{۴۳} \\ ۷^{۶k} \equiv ۱ \qquad\qquad & ۶^{۶k} \equiv ۱ \pmod{۴۳} \end{array}$$

$$۷ \equiv ۱ + ۶ \Longrightarrow ۷^{۶k+۱} \equiv ۶^{۶k+۱} + ۱ \pmod{۴۳}$$

$$۷^{۵} \equiv ۶^{۵} + ۱ \pmod{۴۳}$$

$$\Longrightarrow ۷^{۶t+۵} \equiv ۷^{۵} \equiv ۱ + ۶^{۵} \equiv ۱ + ۶^{۵+۶t} \pmod{۴۳}$$

$$\Longrightarrow ۷^{p} \equiv ۶^{p} + ۱ \pmod{۴۳} \qquad \text{برای هر } p$$

۲. شرط غلط است. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که

$$a = b = c = ۱,\ x = y = \frac{\sqrt{۳}}{۳},\ z = \frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$$

مثلثی به اضلاع a، y و z وجود دارد که‌مساحت آن برابر است با $S_{۱} = \sqrt{۳}/۱۲$. به همین ترتیب مثلثهایی به اضلاع b، x و z و مساحت $\sqrt{۳}/۱۲$ و c، x و y و مساحت $\sqrt{۳}/۱۲$ وجود دارد. اما نمی‌توان P را داخل ABC یافت که $PA = x$، $PB = y$ و $PC = z$ زیرا طول PC که باید درون مثلث باشد از طول بزرگترین ضلع مثلث یعنی ۱، بیشتر است.

۳. اگر $m \geqslant rn + r$، اعداد rn، $rn + ۱$، ... و $rn + r$ را در نظر می‌گیریم. دو تا از این اعداد در یکی از A_iها قرار دارند پس

$$\left.\begin{array}{r} a, b \in A_i \\ a > b \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{rn + i}{rn + j} \leqslant \frac{rn + r}{rn} = ۱ + \frac{۱}{n}$$

برای $m = rn + r - ۱$ یک مثال می‌آوریم.

برای هر $1 \leqslant i \leqslant r$ تعریف می‌کنیم

$$A_i = \{x \mid x \equiv i \pmod{i}\}$$

ادعا می‌کنیم A_iها دارای شرایط مسأله هستند. a و b را دو عضو از A_i می‌گیریم که $a > b$. اگر $i \neq r$، k و l وجود دارند به طوری که $a = kr + i$ و $b = lr + i$.

$$\frac{a}{b} = \frac{kr+i}{lr+i} \geqslant \frac{(l+1)r}{lr+i} = 1 + \frac{r}{lr+i}$$

$$\geqslant 1 + \frac{r}{lr} = 1 + \frac{1}{l}$$

$$> 1 + \frac{1}{n}$$

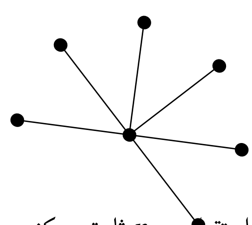
اگر $r = i$، k و l وجود دارند که $a = kr$ و $b = lr$.

$$\frac{a}{b} = \frac{kr}{lr} = \frac{k}{l} \geqslant \frac{l+1}{l} = 1 + \frac{1}{l}$$

$$> 1 + \frac{1}{n}$$

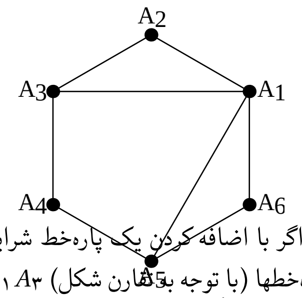
پس در هر صورت اگر $\frac{a}{b}$ بزرگتر از ۱ باشد، از $1 + \frac{1}{n}$ نیز بیشتر است و حکم برقرار نمی‌شود.
پس $m = r(n+1)$.

۴. الف) $n - 1$. شکل نشان می‌دهد که با $n - 1$ پاره‌خط مسأله قابل حل است.



این ادعا را که اقلاً $n - 1$ پاره‌خط لازم است با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = 2$ مسأله بدیهی است فرض کنیم برای $n = k$ درست باشد. اکنون $k + 1$ نقطهٔ A_1، A_2، ... و A_{k+1} را که دارای شرایط مسأله باشند در نظر می‌گیریم به طوری که تعداد کل پاره‌خطهای شکل کمتر از k باشد. در این صورت دستِ‌کم به یکی از این نقاط فقط یک پاره‌خط وصل شده است (چرا؟). اگر این نقطه و این پاره‌خط را از شکل حذف کنیم در نتیجه k نقطه خواهیم داشت (با حفظ شرایط مسأله) که با کمتر از $k - 1$ پاره‌خط به هم وصل شده‌اند که مخالف فرض استقراست.

ب) با توجه به شکل با اضافه کردن دو پاره‌خط شرایط مسأله برقرار می‌شود.



اولاً باید به‌وضوح پاره‌خطّی اضافه کنیم ولی اگر با اضافه کردن یک پاره‌خط شرایط مسأله برقرار شود بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود این پاره‌خطها (با توجه به تقارن شکل) A_1A_3 یا A_1A_4 هستند. که در هر دو صورت نقاط A_2 و A_5 دارای شرایط مسأله نیستند. پس با اضافه کردن تنها یک پاره‌خط نمی‌توان شرایط مسأله را برقرار کرد.

۵. نقطهٔ دلخواه M را روی D_2 در نظر می‌گیریم. از M خط Δ را موازی با D_1 رسم می‌کنیم. صفحهٔ نیمساز زاویهٔ بین D_2 و Δ، (P) را با صفحهٔ هم فاصلهٔ Δ و D_1، (Q)، قطع می‌دهیم. محل تقاطع P و Q را δ می‌نامیم . اگر A نقطه‌ای از δ باشد چون A در P است از D_2 و Δ به یک فاصله است و چون A در Q است از Δ و D_2 به یک فاصله است. پس هر نقطهٔ δ از D_2 و D_1 به یک فاصله است. با تغییر دادن M بینهایت خط به‌دست می‌آید.

۶. روش اول. اثبات را با استقرا روی مجموع درجات صورت و مخرج انجام می‌دهیم. اگر درجهٔ f را n و درجه g را m بگیریم استقرا روی $m+n$ انجام می‌شود (فرض می‌کنیم $n \geqslant m$). اگر $m+n=1$، حکم واضح است. f به یکی از دو صورت زیر است.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p}{q}(x+a)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p}{q(x+a)}$$

فرض کنیم حکم برای همه اعداد کمتر از $m+n$ درست باشد. ثابت می‌کنیم برای $m+n$ درست است. x_0 را یکی از اعدادی می‌گیریم که $\frac{f(x)}{g(x)}$ گویاست و $t(x)$ را می‌گیریم $\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ پس

$$t(x_0)=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=0\Longrightarrow (x-x_0)\mid t(x_0)$$

$$\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x_0)g(x)}=t(x)=(x-x_0)\,u(x)$$

$u(x_0)$ به‌ازای هریک از اعداد گویایی که t گویاست گویا می‌شود. (زیرا $x-x_0$ هم گویاست.) و مجموع درجه‌های صورت و مخرج u برابر $m+n-1$ است. پس $u(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ که p و q دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا هستند. اما

$$\frac{f(x)}{g(x)}=t(x)+\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-x_0)\,u(x) + \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \\
&= \frac{(x-x_0)\,p(x) + \big(f(x_0)/g(x_0)\big)q(x))}{q(x)}
\end{aligned}
$$

اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر بود، به جای $\frac{f}{g}$، $\frac{g}{f}$ را که در شرایط صدق می‌کند در نظر می‌گیریم، و کار را ادامه می‌دهیم.

روش دوم. فرض می‌کنیم f از درجهٔ n و g از درجهٔ m باشد. ثابت می‌کنیم اگر $\frac{f}{g}$ به‌ازای $n+m+1$ مقدار گویا، گویا شود آنگاه $\frac{f}{g}$ را می‌توان به صورت تقسیم دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.

$$
\begin{gathered}
n=\deg(f),\, m=\deg(g),\, t=n+m+1 \\
\alpha_1,\dots,\alpha_t\in\mathbb{Q},\quad \frac{f}{g}(\alpha_1),\dots,\frac{f}{g}(\alpha_t)\in\mathbb{Q},\quad \frac{f}{g}(\alpha_i)=\beta_i
\end{gathered}
$$

p را یک چندجمله‌ای از درجهٔ n با ضریب بزرگترین درجه برابر ۱ و q را یک چندجمله‌ای از درجهٔ m می‌گیریم به طوری که

$$p(\alpha_i)=\beta_i q(\alpha_i),\quad i=1,\dots,t$$

چنین چندجمله‌ایهایی وجود دارند زیرا اگر f و g را بر ضریب x^n در f تقسیم کنیم دو چندجمله‌ای جدید در t تساوی بالا صدق می‌کنند.

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0 \\
q(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0
\end{aligned}
$$

و مجموعهٔ معادلات

$$\alpha_i^n + a_{n-1}\alpha_i^{n-1}+\dots+a_0=\beta_i(b_m\alpha_i^m+b_{m-1}\alpha_i^{m-1}+\dots+b_0)$$

برای $i=1,2,\dots,m+n-1$ دارای جواب است (a_jها و b_jها مجهولند) و چون ضرایب دستگاه گویا هستند، دستگاه دارای ریشهٔ گویاست. پس ضرایب p و q گویا هستند. از

$$\frac{p(\alpha_i)}{q(\alpha_i)}=\frac{f(\alpha_i)}{g(\alpha_i)},\quad i=1,\dots,m+n+1$$

نتیجه می‌شود

$$pg(\alpha_i)\equiv fq(\alpha_i),\quad i=1,\dots,m+n+1$$

درجهٔ fq و pg، $m+n$ است و به‌ازای $m+n+1$ مقدار برابرند؛ پس

$$pg\equiv fq\Longrightarrow \frac{p}{q}\equiv\frac{f}{g}$$