

آزمون مرحله‌ی اول دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. فرض کنیم a, b و c اعداد حقیقی باشند که

$$9a + 11b + 29c = 0$$

ثابت کنید $ax^3 + bx + c = 0$ در $[0, 2]$ یک ریشه دارد.

۲. اگر $a > b$ اعداد طبیعی بوده و n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $\frac{a+n}{a}$ و $\frac{a+n}{b}$ اعداد طبیعی باشند و $d = (a, b)$ ثابت کنید

$$2d \leq (n+1)\sqrt{a-b}$$

۳. روی مربع $ABCD$ نقاط K و N روی AB و AD به ترتیب داده شده‌اند به طوری که

$$AK \times AN = 2BK \times DN$$

اضلاع CK و CN قطر BD را در نقاط L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید نقاط K, L, M, N و A روی یک دایره هستند.

۴. تعداد سی‌وسه عدد طبیعی داده شده است که عوامل اول آنها فقط از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تشکیل شده است. ثابت کنید حاصلضرب حداقل دوتای آنها مربع کامل است.

۵. یک نقطه P درون یک $2n$ ضلعی محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطه P وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا یکی از اضلاع را قطع کند. ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ‌یک از این خطوط آنرا قطع نمی‌کند. (قطع کردن امتداد اضلاع مورد نظر نیست).

۶. صفحه P و نقطه M روی آن و دو نقطه A و B در یک طرف آن مفروضند. از نقطه M خطی در صفحه P رسم کنید که از A و B به یک فاصله باشد.