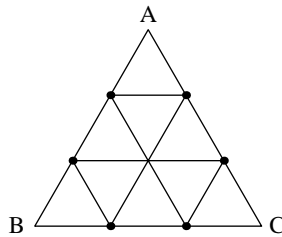


آزمون مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

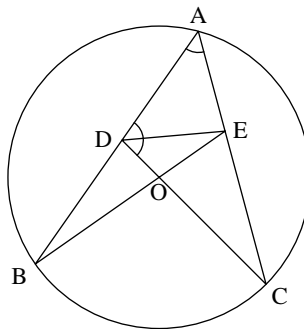
زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. در مثلث دلخواه ABC هر ضلع را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم ($n \geq 2$). از هر نقطه تقسیم روی هر ضلع، خطوطی به موازات دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. مثلاً برای $n = 3$ شکل زیر حاصل می‌شود.
برای هر $n \geq 2$ تعداد متوازی‌الاضلاع‌های به‌وجود آمده را مشخص کنید.



۲. در شکل نقطه O مرکز دایره است. زاویه α چند درجه است؟



آزمون مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی

۳. \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح و \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویاست. تمام توابع $f: \mathbb{Z} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ را طوری پیدا کنید که در معادله تابعی زیر صدق کنند.

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

۴. اگر $\overline{a_1 \dots a_n}$ یک عدد n رقمی باشد ثابت کنید تابعی یک به یک مانند

$$f: \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$$

وجود دارد به طوری که $f(a_1) \neq 0$ و $f(a_1) \dots f(a_n)$ بر ۳ بخشپذیر باشد.

۵. فرض کنید در مثلث ABC نقاط M ، N و P به ترتیب نقاط تماس دایره محاطی داخلی ABC با اضلاع AB ، AC و BC باشند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث MNP ، مرکز دایره محاطی [مثلث ABC] و مرکز دایره محاطی مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

۶. اگر $n > 3$ فرد باشد و داشته باشیم $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ (p_i ها اعداد اول هستند) و

$$m = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

نشان دهید عدد اولی مانند p وجود دارد به طوری که $1 - 2^m \mid p$ ولی $p \nmid n$.