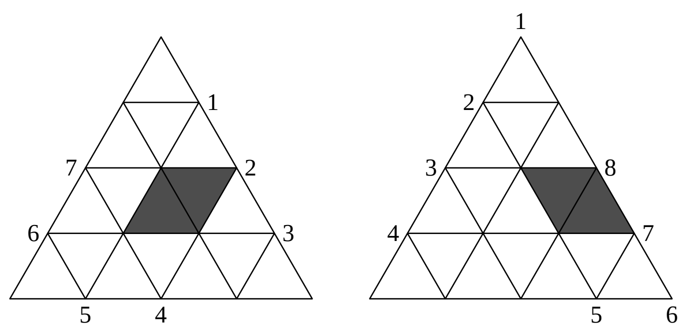
حل مسائل مرحله‌ی دوم دوازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: دی ماه ۱۳۷۳

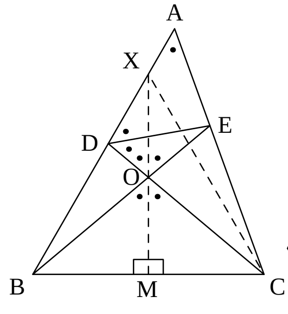
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. هر متوازی‌الاضلاع از برخورد دو زوج خط موازی به‌دست می‌آید و این خطها اضلاع مثلث را در ۷ یا ۸ نقطه قطع می‌کنند (زیرا ممکن است دو خط روی یک ضلع به‌هم برسند) در واقع دو ضلع دو نقطه تقاطع دارند و یک ضلع ۳ یا ۴ نقطه، لذا هر متوازی‌الاضلاع با انتخاب یک ضلع و ۳ یا ۴ نقطه روی آن مشخص می‌شود، چون روی هر ضلع $n+۱$ نقطه موجود است، داریم

$$\text{تعداد متوازی‌الاضلاعها} = ۳ \times \left(\binom{n+۱}{۴} + \binom{n+۱}{۳}\right) = ۳ \times \binom{n+۲}{۴}$$



۲.



۱

عمودمنصف BC را رسم می‌کنیم تا AB را در X قطع کند، آنگاه دو مثلث ODX و DOE برابرند (زض‌ز) و مثلث BOD متساوی‌الساقین است، پس اگر $BX = BE = k$ و $BC = a$ باشد، داریم

$$\angle BXC = ۳۶۰^\circ - ۶\alpha \Longrightarrow \angle BCX = ۳\alpha - ۹۰^\circ$$

و

$$\angle BEC = ۵\alpha - ۱۸۰^\circ \quad \text{و} \quad \angle BCA = ۲۷۰^\circ - ۴\alpha$$

حال در مثلث BXC می‌گوییم

$$k < a \Longrightarrow ۳\alpha - ۹۰^\circ < ۳۶۰^\circ - ۶\alpha \Longrightarrow \alpha < ۵۰^\circ$$

و در مثلث EBC داریم

$$k < a \Longrightarrow ۲۷۰^\circ - ۴\alpha < ۵\alpha - ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \alpha > ۵۰^\circ$$

به‌همین ترتیب برای $k > a$ نیز تناقض مشابهی حاصل می‌شود، لذا زاویهٔ α برابر ۵۰ درجه می‌شود.

۳. ادعا می‌کنیم f، تابعِ ثابت است.

$$f(۱) = f\left(\frac{۱+۲}{۳}\right) = f(۱) + f(۲)۲ \Longrightarrow f(۱) = f(۲)$$
$$f(۲) = f\left(\frac{۳+۳}{۳}\right) = \frac{f(۳)+f(۳)}{۲} \Longrightarrow f(۲) = f(۳)$$

فرض کنید

$$f(۱) = f(۲) = \cdots = f(۳k)$$

پس

$$f(۲) = f(k+۱) = f\left(\frac{۳k+۱+۲}{۲}\right) = \frac{f(۳k+۱)+f(۲)}{۲} \Longrightarrow f(۳k+۱) = f(۲)$$
$$f(۱) = f(k+۱) = f\left(\frac{۳k+۲+۱}{۳}\right) = \frac{f(۳k+۲)+f(۱)}{۲} \Longrightarrow f(۳k+۲) = f(۱)$$
$$f(۳) = f(k+۲) = f\left(\frac{۳k+۳+۳}{۳}\right) = \frac{f(۳k+۳)+f(۳)}{۲} \Longrightarrow f(۳k+۳) = f(۳)$$

در نتیجه

$$f(۱) = f(۲) = f(۳) = \cdots = f(۳k) = f(۳k+۱) = f(۳k+۲) = f(۳k+۳)$$

پس f روی اعداد صحیح و مثبت ثابت است، اگر $x > ۰$ آنگاه $-x + ۳ > ۰$ پس

$$f(۱) = f\left(\frac{x + (-x + ۳)}{۳}\right) = \frac{f(x) + f(-x + ۳)}{۲}$$
$$= \frac{f(x) + f(۱)}{۲}$$

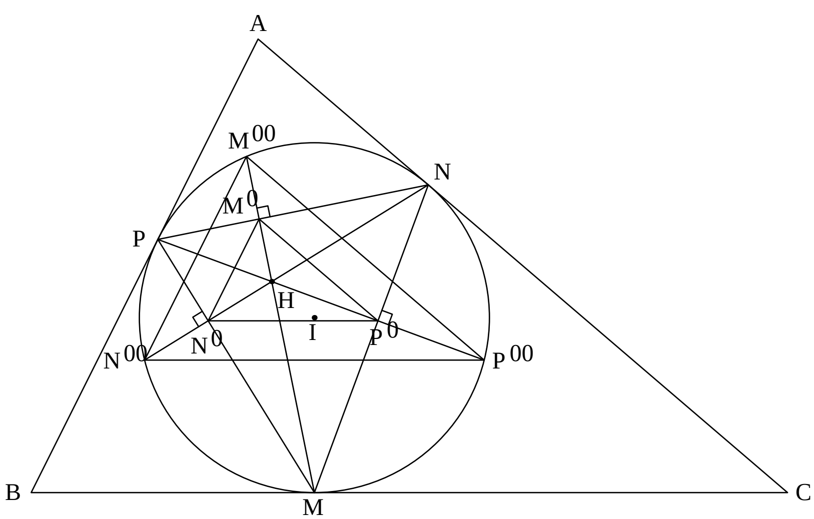
پس $f(x) = f(۱)$ و f ثابت است.

۴. فرض کنید b_i تعداد تکرار رقم iام باشد اگر b_j و b_i موجود باشند که

$$b_i \equiv b_j \not\equiv ۰ \pmod{۳}$$

آنگاه تعریف می‌کنیم $f(j) = ۸$ و $f(i) = ۷$، این روند را روی بقیهٔ ارقام ادامه می‌دهیم و به‌جای $f(i)$ و $f(j)$ به‌ترتیب ۴ و ۵، و ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم، بعد از اتمام این روند یا تعداد ارقام باقیمانده کوچکتر یا مساوی ۴ است یا فقط یک a_k و یک a_l موجودند که $a_k \equiv ۱$ و $a_l \equiv ۲$. در حالت اول ارقام باقیمانده را با ۰، ۳، ۶ و ۹ جایگزین می‌کنیم و در حالت دوم k و l را با ۰ و ۳ جایگزین خواهیم کرد (در هر حالت رقم اول را با غیرصفر جایگزین می‌کنیم)، برقراری شرطهای مسأله واضح است.

۵. $M'N'P'$ را مثلث ارتفاعی MNP می‌گیریم، به‌راحتی دیده می‌شود که اضلاع متناظر دو مثلث $M'N'P'$ و ABC موازیند، پس یک نقطه مانند G وجود دارد که دو مثلث با تجانس مرکزی نسبت به‌آن، به هم تبدیل می‌شوند.



پس مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $P'N'M'$، I (مرکز دایره محاطی ABC) و G روی یک خط راست قرار دارند، یعنی H، I و G روی یک خط هستند، همچنین مرکز دایرهٔ محیطی $M'N'P'$، G و O نیز روی یک خط واقعند، حال توجه می‌کنیم که دو مثلث $M'N'P'$ و $M''N''P''$ با تجانس به مرکز H به‌هم تبدیل می‌شوند. پس مرکز دایرهٔ محیطی $M'N'P'$ (مثلاً نقطهٔ O') و مرکز دایرهٔ محیطی $M''N''P''$ (نقطهٔ I)، و H روی یک خط واقع می‌شوند.

پس ثابت شد که G، I، H، O و O' روی یک خط قرار دارند.

۶. واضح است که $۲^k \mid m$، پس خواهیم داشت:

$$۲^m - ۱ = t^{۲^k} - ۱$$

که در آن $t > ۳$ و t زوج است. حال داریم

$$۲^m - ۱ = t^{۲^k} - ۱ = (t-۱)\prod_{i=۰}^{k-۱}\left(t^{۲^i}+۱\right)$$

یعنی $۲^m - ۱$ دارای $k+۱$ عامل است که به شکل $t-۱$ و $t^{۲^i}+۱$ هستند و دوبه‌دو نسبت به هم اولند ولی n دارای k عامل اول است پس $\exists p, p \mid ۲^m - ۱$ و $P \nmid n$.