

# آزمون مرحله‌ی دوم سیزدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. نشان دهید برای هر عدد طبیعی  $n \geq 3$ ، دو مجموعه  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  و  $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  از اعداد صحیح وجود دارد به طوری که

$$A \cap B = \emptyset \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad (2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \quad (3)$$

۲. مثلث  $ABC$  که زوایای آن حاده هستند و خط  $L$  واقع در صفحه مثلث مفروضند. قرینه‌های خط  $L$  را نسبت به هریک از اضلاع مثلث  $ABC$  به دست می‌آوریم تا یکدیگر را در  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  قطع کنند. ثابت کنید مرکز دایره محاطی داخلی مثلث  $A'B'C'$  روی دایره محیطی مثلث  $ABC$  قرار می‌گیرد.

۳.  $12k$  نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر نفر دقیقاً با  $3k+6$  نفر دیگر از مهمانان دست می‌دهد. همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که با (هر دوی) هر دو نفر دست می‌دهند، عددی ثابت است. تعداد افراد شرکت کننده در این مهمانی را تعیین کنید.

۴. فرض کنید  $S = \{2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ . ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان برحسب حاصلجمع اعضای متمایز  $S$  نوشت که هیچ‌یک از عوامل جمع مضربی از عامل دیگری نباشد. (مثلاً  $19 = 9 + 6 + 4$ ).

۵. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح  $n \geq 0$  داریم:

$$\left[ \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right] = \left[ \sqrt{9n+8} \right]$$

منظور از  $[x]$ ، کوچکترین عدد صحیحی است که بزرگتر از  $x$  یا مساوی با آن است.

۶. در چهاروجهی  $ABCD$  فرض کنید  $A'$ ،  $B'$ ،  $C'$  و  $D'$  به‌ترتیب مراکز دایره محیطی مثلث‌های  $BCD$ ،  $CDA$ ،  $DAB$  و  $ABC$  باشند. اگر صفحه‌ای را که از نقطه  $X$  بر خط  $YZ$  عمود می‌شود، به  $S(X, YZ)$  نمایش دهیم ثابت کنید چنانچه  $A'$ ،  $B'$ ،  $C'$  و  $D'$  در یک صفحه نباشند چهار صفحه  $S(A, C'D')$ ،  $S(B, A'D')$ ،  $S(C, A'B')$  و  $S(D, B'C')$  از یک نقطه می‌گذرند.