حل مسائل مرحله‌ی دوم سیزدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آذر ماه ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عباد‌الله محمودیان

۱. راه حل اول. کافی است بگیریم

$$A=\{1,2,3,\dots,n-1\}\cup\left\{-\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$
$$B=\{-1,-2,-3,\dots,-(n-1)\}\cup\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

به‌وضوح A و B در شرایط مسأله صدق می‌کنند.

البته در صورت مسأله اعداد صحیح مورد نظر بوده است ولی حتی اگر منظور اعداد طبیعی باشد دقت می‌کنیم که اگر هر دسته جواب را به اندازهٔ یک عدد صحیح منتقل کنیم، باز هم جواب است.

راه حل دوم. به روش استقراء عمل می‌کنیم

$$n=3:\quad A=\{0,4,5\},\quad B=\{1,2,6\}$$

فرض کنید برای $n=k$ شرایط مورد نظر برقرار باشد، یعنی

$$\sum_{i=1}^{k}x_i=\sum_{i=1}^{k}y_i,\quad \sum_{i=1}^{k}x_i^2=\sum_{i=1}^{k}y_i^2$$

حال درستی حکم را برای $n=k+1$ نشان می‌دهیم. فرض کنید

$$A=\{x_1,\dots,x_{n-1},rx_n,x_n+ry_n\}$$
$$B=\{y_1,\dots,y_{n-1},ry_n,rx_n+y_n\}$$

برای $r\neq 0$ شرایط مورد نظر برقرار است. فقط کافی است r را به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم تا هیچ‌یک از دو مجموعه اعضای برابر نداشته باشد.

راه حل سوم. توجه می‌کنیم که دسته مجموعه‌های ۳ عضوی، ۴ عضوی و ۵ عضویِ زیر جواب هستند.

$$n=1:\ A=\{0,4,5\},\quad B=\{1,2,6\}$$
$$n=2:\ A=\{10,-10,11,-11\},\quad B=\{5,-5,14,-14\}$$
$$n=3:\ A=\{10,11,-14,-5,-2\},$$
$$B=\{-10,-11,14,5,2\}$$

برای هر $n \geqslant ۳$ مفروض، برحسب آنکه $n = ۳k$، $n = ۳k + ۱$ و یا $n = ۳k + ۲$، به کمک دسته جوابهای فوق و با توجه به اینکه انتقال هر دسته جواب به اندازهٔ یک عدد صحیح بازهم جواب است، جواب مورد نظر را می‌سازیم.

۲. این سه خط را L'، L'' و L''' می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\alpha = \angle A$، $\beta = \angle B$ و $\gamma = \angle C$. خط L' با عمل قرینه کردن نسبت به BC به خط L می‌رود و خط L با قرینه کردن نسبت به AB به خط L''' برده می‌شود، پس L''' حاصل دوران L' حول نقطهٔ B به اندازهٔ زاویهٔ ۲β است. حال چون B از L' و L''' به یک فاصله است، پس BB' نیمساز زاویهٔ B' است. مشابهاً با دورانی به مرکز A و به اندازهٔ زاویهٔ ۲α، خط L'' به L''' برده می‌شود و AA' نیمساز زاویهٔ A' است، و بالاخره با دورانی به اندازهٔ زاویهٔ ۲γ حول C، خط L'' نیز به L' می‌رود، و CC' نیمساز زاویهٔ C' است. پس این سه خط در نقطهٔ ω که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ است همرسند. نتیجه می‌شود که

$$\angle C'B'\omega = ۹۰^\circ - \beta$$
$$\angle B'C'\omega = ۹۰^\circ - \gamma$$

در نتیجه

$$\angle B\omega C = \angle B'\omega C' = \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ - \alpha$$

پس ω روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار می‌گیرد.

حالت خاص. اگر L از محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC بگذرد L'، L'' و L''' از یک نقطه روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرند، یعنی $\triangle A'B'C'$ یک نقطه روی دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ است.

۳. فرض کنید تعداد افرادی که با هر دو نفر دست می‌دهند n باشد. شخص a را در نظر بگیرید، فرض کنید

$B = \{$افرادی که با a دست داده‌اند$\}$

$C = \{$افرادی که با a دست نداده‌اند$\}$

می‌دانیم

$$|B| = ۳k + ۶$$
$$|C| = ۹k - ۷$$

اگر $b \in B$ باشد، افرادی که هم با a و هم با b دست می‌دهند در B هستند، پس b با n نفر در B دست می‌دهد و با $۳k + ۵ - n$ نفر در C.

اگر $c \in C$ باشد همهٔ افرادی که هم با a و هم با c دست می‌دهند در B هستند پس c با n نفر در B دست می‌دهد.

پس در مجموع تعداد دست دادنهای بین B و C رابطهٔ زیر را نتیجه می‌دهد.

$$(۳k + ۶)(۳k + ۵ - n) = (۹k - ۷)n$$

$$۹k^۲ - ۱۲kn + ۳۳k + n + ۳۰ = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} n = ۳m \\ ۴m = k + ۳ + \dfrac{۹k + ۴۳}{۱۲k - ۱} \end{cases}$$

حال برای $k \geqslant ۱۵$ داریم $۱۲k - ۱ > ۹k + ۴۳$ و $۴m$ صحیح نخواهد بود، و برای $۱ \leqslant k \leqslant ۱۴$، فقط برای $k = ۳$ جواب صحیح داریم، پس ۳۶ نفر در مهمانی بوده‌اند.

۴. با استقرا عمل می‌کنیم.

$$۱ = ۱, \quad ۲ = ۲, \quad ۳ = ۳, \quad ۴ = ۲^۲, \quad ۵ = ۲ + ۳, \quad \ldots$$

فرض کنید برای هر عدد کوچکتر از k حکم درست باشد، حال حکم را برای k ثابت می‌کنیم.

حالت اول. k زوج، $k = ۲l$، در این صورت l را به‌صورت حاصلجمع مورد نظر می‌نویسیم و هر کدام از عوامل را دو برابر می‌کنیم.

حالت دوم. k فرد، فرض کنید p بزرگترین توان از عدد ۳ است که کوچکتر از k است، فرض کنید $q = \frac{k-p}{۲}$، عدد p را به‌عنوان یکی از عوامل جمع بگیرید و اگر $q > ۰$ آنگاه با استقرا q را می‌توان به‌صورت حاصلجمع مورد نظر، $q = \sum s_i$، نوشت. نشان می‌دهیم $k = p + \sum ۲s_i$ یک حاصلجمع مورد نظر است. چون p توانی از ۳ است، پس مضربی از $۲s_i$ نیست، حال اگر به‌ازای یک i، عدد $۲s_i$ مضربی از p باشد آنگاه $۲s_i \geqslant ۲p$ و این متناقض با این است که $k < ۳p$.

۵. به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲$ رابطه برقرار است، به‌ازای $n \geqslant ۳$ با استفاده از عبارت درجهٔ دوم $(x-۱)x(x+۱) - (x - \frac{۱}{۹})^۳$ (حدس ریشه‌ها) نتیجه می‌شود

$$n(n+۱)(n+۲) > \left(n + \frac{۸}{۹}\right)^۳$$

حال با استفاده از نامساوی میانگین هندسی و حسابی داریم

$$\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲}}{۳} > \sqrt[۳]{\sqrt{n}\sqrt{n+۱}\sqrt{n+۲}} > \sqrt{n + \frac{۸}{۹}}$$

و

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲} > \sqrt{۹n+۸}$$

و با استفاده از نامساوی میانگین جذر داریم

$$\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲}}{۳} < \sqrt{\frac{n + n+۱ + n+۲}{۳}}$$

پس

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲} < \sqrt{۹n+۹}$$

چون هیچ عدد صحیحی بین $\sqrt{۹n+۸}$ و $\sqrt{۹n+۹}$ قرار ندارد، پس

$$\left\lceil \sqrt{n} + \sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{۹n+۸} \right\rceil$$

۶. کره‌هایی به مرکزهای A'، B'، C' و D' و به‌ترتیب به شعاعهایی برابر با شعاع دایرهٔ محیطی مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC در نظر می‌گیریم و آنها را به‌ترتیب $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ می‌نامیم. A روی کره‌های $S_۳$ و $S_۴$ قرار دارد و $C'D'$ خط‌المرکزین $S_۳$ و $S_۴$ می‌باشد، بنابراین $S(A, C'D')$ صفحهٔ اصلی دو کرهٔ $S_۳$ و $S_۴$ می‌باشد (صفحهٔ اصلی دو کره، مشابه محور اصلی دو دایره، مکان هندسی

نقاطی است که نسبت به دو کره دارای یک قوت هستند و می‌شود ثابت کرد که بر خط‌المرکزین عمود است).

به همین ترتیب $S(B, A'D')$، $S(C, A'B')$ و $S(D, B'C')$ به‌ترتیب صفحات اصلی کره‌های $(S_۱, S_۴)$، $(S_۱, S_۲)$ و $(S_۲, S_۳)$ می‌باشند و لذا از یک نقطه می‌گذرند (زیرا مرکزهای این کره‌ها در یک صفحه نیستند).