

# آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اعداد زوج متوالی ۲، ۴، ۶، ۸، ... را آنقدر ضرب می‌کنیم تا حاصل بر ۱۳۷۵ بخش‌پذیر شود. بزرگترین عدد زوج به کار رفته در کدامیک از روابط زیر صدق می‌کند؟

- (الف) بین ۱ تا ۱۱ (ب) بین ۱۱ تا ۲۱ (ج) بین ۲۱ تا ۳۱  
(د) بین ۳۱ تا ۴۱ (ه) چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

۲. اگر  $9x + 5y$  بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، برای اینکه لزوماً  $10x + ky$  نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر شود،  $k$  را برابر کدامیک از مقادیر زیر انتخاب کنیم؟

- (الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۱۰

۳. مربع  $ABCD$  در صفحه مفروض است. سه خط موازی  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  را به ترتیب از سه رأس  $A$ ،  $B$  و  $C$  رسم می‌کنیم، به طوری که فاصله‌ی  $L_1$  با  $L_2$  برابر ۵ و فاصله‌ی  $L_2$  با  $L_3$  برابر ۷ باشد. مطلوب است مساحت مربع.

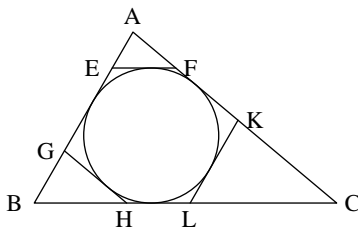
- (الف) ۷۰ (ب)  $\sqrt{35}$  (ج) ۳۵ (د)  $\sqrt{74}$  (ه) ۷۴

۴. تعداد سه‌تاییهای مرتب  $(x, y, z)$  از اعداد صحیح که در معادلات  $x + y - z = 124$  و  $x^2 + y - z = 100$  صدق می‌کنند عبارت است از:

- (الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۵. مثلث  $ABC$  و دایره‌ی محاطی آن به شعاع  $r$  مفروض است. سه مماس  $EF$ ،  $GH$  و  $KL$  را به ترتیب موازی  $BC$ ،  $AC$  و  $AB$  رسم کرده‌ایم. اگر  $r_a$ ،  $r_b$  و  $r_c$  به ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای  $AEF$ ،  $BGH$  و  $CKL$  باشند، آنگاه کدامیک از روابط زیر همواره صحیح است؟

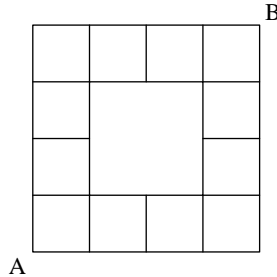
- (الف)  $r - r_a < r_a + r_b$  (ب)  $r - r_a > r_b + r_c$   
(ج)  $r - r_a = r_b + r_c$  (د)  $r - r_a = r_b - r_c$   
(ه) هیچ‌کدام از این روابط همواره برقرار نیست.



# آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۶. در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم روی خطوط رسم شده از  $A$  به  $B$  برویم به طوری که کوتاهترین مسیر ممکن را پیموده باشیم؟

- (الف) ۱۸ (ب) ۳۴ (ج) ۲۶ (د) ۲۸ (ه) ۳۲



۷. عدد طبیعی  $b$  را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی  $a$  به دست می‌آید مقلوب  $a$  می‌نامیم (مثلاً مقلوب  $۱۳۷۵$  عدد  $۵۷۳۱$  است). مطلوب است تعداد اعداد بین  $۱$  تا  $۹۹۹۹۹$ ، که مقلوبشان با خودشان برابر است.

- (الف) ۱۰۹۸ (ب) ۱۲۲۰ (ج) ۹۷۶ (د) ۱۵۴۲ (ه) ۱۰۰۸

۸. فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد حقیقی باشند که  $a \neq 0$ . اگر  $a$  و  $۴a + ۳b + ۲c$  دارای یک علامت باشند، کدام یک از نتیجه‌گیریهای زیر برای معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  درست است؟  
 (الف) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی  $(۱, ۴)$  قرار گیرند.  
 (ب) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی  $(۱, ۲)$  قرار گیرند.  
 (ج) معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است.  
 (د) دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامتهای متفاوتی هستند.  
 (ه) هر دو ریشه‌ی معادله در صورت وجود دارای علامت یکسانی هستند.

۹. دنباله‌های  $a_n = \sqrt{۱۲۳ + n^2}$  و  $b_n = n + ۳$  ( $n = ۱, ۲, ۳, \dots$ ) داده شده‌اند. فرض کنید که  $r$  کوچکترین عدد صحیحی باشد که  $a_r < b_r$  و  $s$  نیز بزرگترین عدد صحیحی باشد که  $a_s > b_s + ۱$ . در این صورت  $r + s$  برابر است با:

- (الف) ۳۰ (ب) ۳۱ (ج) ۳۲ (د) ۳۳ (ه) ۳۸

۱۰. مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) مفروض است. نیمساز زاویه‌ی  $B$  ضلع  $AC$  را در  $D$  قطع می‌کند و داریم  $BC = BD + AD$ . اندازه‌ی زاویه‌ی  $A$  برابر است با:

- (الف)  $۱۰۰^\circ$  (ب)  $۱۰۸^\circ$  (ج)  $۱۱۰^\circ$  (د)  $۱۱۵^\circ$  (ه)  $۱۲۰^\circ$

۱۱. در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) میانه‌ی  $BM$  عمود بر نیمساز  $CD$  است. در این صورت  $\sin C$  برابر با کدام یک از مقادیر زیر است؟

- (الف)  $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$  (ب)  $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$  (ج)  $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$  (د)  $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$  (ه)  $\frac{۱}{۴}$

۱۲. فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد صحیح و مثبت باشند به طوری که  $a < ۲b$  و باقیمانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $b$  برابر  $۲r$ ، باقیمانده‌ی تقسیم  $a$  بر  $c$  برابر  $r$ ، و باقیمانده‌ی تقسیم  $b$  بر  $c$  نیز برابر  $r$  است. در این صورت کوچکترین عدد از میان اعداد زیر که بر  $c$  بخش‌پذیر باشد کدام است؟

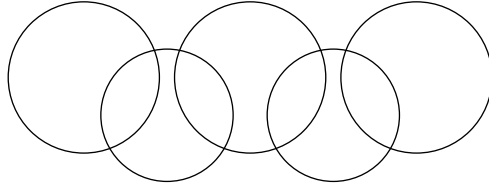
- (الف)  $(a+b)$  (ب)  $\frac{(a+b)}{۲}$  (ج)  $\frac{(a+b)}{۳}$  (د)  $۲(a+b)$  (ه)  $۳(a+b)$

۱۳. ۵ دایره مطابق شکل، ۹ ناحیه (متناهی) در صفحه به وجود آورده‌اند. اعداد از  $۱$  تا  $۹$  را به این نواحی طوری نسبت می‌دهیم که مجموع اعداد هر دایره با مجموع اعداد دایره‌های دیگر مساوی باشد. بیشترین مقداری که

# آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

این مقدار مساوی می‌تواند داشته باشد، عبارت است از:

- الف) ۱۲ (ب) ۱۳ (ج) ۱۴ (د) ۱۵ (ه) ۱۶



۱۴. اگر  $S = \frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\dots(100^2-1)}{(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1)\dots(100^2+1)}$  کدام یک از مقادیر زیر به  $S$  نزدیکتر است؟  
الف) ۰ (ب) ۰.۰۶۷ (ج) ۰.۰۶۶۷ (د) ۰.۰۶۶۶۷ (ه) ۰.۰۶۶۶۶۷

۱۵. به ازای کدام مقدار  $n$  معادله  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$  در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای جواب منحصر به فردی است؟  
الف) ۱۰۲۴ (ب) ۲۱۱۹ (ج) ۲۲۱۹ (د) ۲۶۵۱ (ه) هیچکدام

۱۶. یک صفحه‌ی شطرنجی  $25 \times 25$  را در نظر گرفته اعداد ۱ تا  $25^2$  را به ترتیب زیر در خانه‌های آن قرار می‌دهیم. اعداد ۱، ۲، ... و  $25$  را از چپ به راست در سطر اول، ۲۶، ۲۷، ... و  $50$  را از چپ به راست در سطر دوم، و بقیه را به همین ترتیب در سطرهای بعدی مربع قرار می‌دهیم. حال اگر ۲۵ خانه را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند در آن صورت مجموع اعداد این خانه‌ها چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد؟  
الف) فقط می‌تواند برابر  $\binom{25}{2}$  باشد.  
ب) هر مقدار بین  $\binom{25}{2}$  و  $\binom{25}{3}$  می‌تواند باشد.  
ج) فقط می‌تواند  $\frac{1}{2}(25^2 + 25)$  باشد.  
د) هر مقدار بین  $\binom{25}{2}$  و  $\frac{1}{2}(25^2 + 25)$  می‌تواند باشد.  
ه) هر مقدار بین  $25^2$  و  $\frac{1}{2}(25^2 + 25)$  می‌تواند باشد.

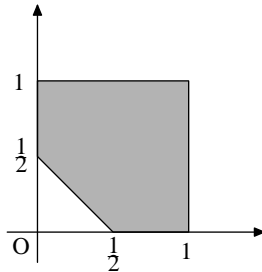
۱۷. چند جمله‌ای  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ ، که  $a_i$ ها اعداد صحیح هستند، مفروض است. اگر داشته باشیم  $P(1) = P(2) = 0$ ، در آن صورت دقیق‌ترین حکمی که در مورد ضرایب  $P$  می‌توان بیان کرد کدام است؟

- الف) ضریب جمله‌ی ثابت (یعنی  $a_0$ ) کوچکتر یا مساوی ۲ است.  
ب) اختلاف بین تعداد ضرایب مثبت و ضرایب منفی حداکثر یک است.  
ج) مجموع ضرایب توانهای فرد قرینه‌ی مجموع ضرایب توانهای زوج است.  
د) حداقل یک ضریب کوچکتر یا مساوی  $-2$  وجود دارد.  
ه) هیچ‌کدام از حکمهای بالا در مورد تمامی  $P(x)$ ها صدق نمی‌کنند.

۱۸. مربع  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  را در نظر بگیرید و به ازای هر  $t \in [0, 1]$   $C_t$  را مجموعه‌ی نقاطی از  $S$  در نظر بگیرید که بالای خط واصل بین نقاط  $(0, 1-t)$  و  $(t, 0)$  هستند ( $C_0 = S$ ). در شکل نشان داده شده است. اگر  $A$  اشتراک تمام  $C_t$ ها،  $0 \leq t \leq 1$ ، باشد یعنی  $A = \{x \mid x \in C_t, \forall t \in [0, 1]\}$  در آن صورت  $A$  برابر کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

- الف)  $S \cap \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$  (ب)  $S \cap \{(x, y) \mid x + \sqrt{y} \geq 1\}$   
ج)  $S \cap \{(x, y) \mid \sqrt{x} + y \geq 1\}$  (د)  $S \cap \{(x, y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1\}$   
ه)  $S \cap \{(x, y) \mid \sqrt{x+y} \geq 1\}$

# آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور



۱۹. فرض کنید که  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ده عدد طبیعی زوج و متمایز باشند. برای هر دنباله‌ی دلخواه  $a_1, a_2, \dots, a_{1375}$  که  $a_i$ ها از اعداد  $P_1$  تا  $P_n$  باشند کدام یک از احکام زیر درست است؟
- (الف) تعدادی متناهی از  $a_i$ های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آنها یک مربع کامل است.
- (ب) تعدادی متناهی از  $a_i$ های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آنها یک مکعب کامل است.
- (ج) تعدادی متناهی از  $a_i$ های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آنها دو برابر یک مربع کامل است.
- (د) تعدادی متناهی از  $a_i$ های متوالی وجود دارند که حاصل ضرب آنها دو برابر یک مکعب کامل است.
- (ه) الف و ب هر دو درست است.

۲۰. فرض کنید ۱۳۷۵ بزرگترین عدد صحیحی است که  $2^{1375}$ ، عدد طبیعی  $n$  را می‌شمارد. در آن صورت بزرگترین مقدار  $k$  به طوری که  $2^k$  عدد  $1 + 9 + 9^2 + \dots + 9^{4n-1}$  را بشمارد برابر است با:
- (الف) ۱۳۷۴ (ب) ۱۳۷۵ (ج) ۱۳۷۶ (د) ۱۳۷۷ (ه) ۱۳۷۸

۲۱. فرض کنید  $f$  و  $g$  دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و با درجه‌ی بزرگتر یا مساوی ۲ باشند. اگر داشته باشیم:

$$f(x^2) = f\left(x - \frac{1}{x}\right)g\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

- در این صورت از بین نتیجه‌گیریهای زیر، کدام یک دقیق‌تر است؟
- (الف) به ازای هر  $n \geq 2$  چنین چندجمله‌ایهایی وجود دارند به طوری که  $f$  از درجه‌ی  $n$  است.
- (ب) چنین چندجمله‌ایهایی وجود ندارند.
- (ج)  $f(x)$  ریشه‌ای در  $(0, \frac{1}{4})$  دارد.
- (د)  $g(x)$  ریشه‌ای در  $(0, \frac{1}{4})$  دارد.
- (ه)  $g(x)$  برای هر  $x$  بزرگتر از صفر است.

۲۲. در مثلث مفروض  $ABC$ ،  $D$  را پای نیمساز رأس  $A$ ، و  $E$  را قرینه‌ی  $D$  نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع  $BC$  می‌گیریم. حال اگر  $F$  را روی  $BC$  به قسمی انتخاب کنیم که  $\angle BAF = \angle EAC$  در آن صورت  $\frac{BF}{FC}$  برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

(الف)  $\frac{c}{b}$  (ب)  $\frac{c^2}{b^2}$  (ج)  $\frac{c^2}{b^3}$  (د)  $\frac{c}{c+b}$  (ه)  $\frac{c^2}{(b+c)^2}$

۲۳. در مثلث  $ABC$  نقطه‌ی  $H$  محل برخورد ارتفاعهای مثلث است. اگر  $AH = BC$ ، آنگاه زاویه‌ی  $A$  چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟
- (الف)  $30^\circ$  و  $45^\circ$  (ب)  $60^\circ$  و  $75^\circ$  (ج)  $60^\circ$  (د)  $45^\circ$  (ه)  $45^\circ$  و  $60^\circ$

# آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. اگر  $S = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ ، آنگاه بزرگترین زیرمجموعه‌ی آن با این خاصیت که هیچ عضو آن دو برابر دیگری نباشد چند عضو دارد؟

الف) ۵۵ (ب) ۶۲ (ج) ۶۶ (د) ۷۱ (ه) ۷۷

۲۵. در مورد تعداد دنباله‌های  $n_1, n_2, n_3, \dots$  از اعداد طبیعی با این خاصیت که برای هر  $k$  داشته باشیم  $n_{k+1} > n_k$  چه می‌توان گفت؟

الف) بینهایت دنباله با این خاصیت وجود دارد.  
 ب) تعداد زوجی از این دنباله‌ها وجود دارد.  
 ج) دقیقاً ۵ دنباله با این خاصیت وجود دارد.  
 د) دقیقاً ۳ دنباله با این خاصیت وجود دارد.  
 ه) دقیقاً یک دنباله با این خاصیت وجود دارد.

۲۶. برای عدد طبیعی  $n$ ، بسط  $n$  در مبنای ۲ را در نظر گرفته و  $f(n)$  را برابر تعداد رقمهای صفر در آن در نظر می‌گیریم (به عنوان مثال  $f(4) = 2$  و  $f(6) = 1$ ). اگر فرض کنیم که  $S = 2^{f(1)} + 2^{f(2)} + \dots + 2^{f(255)}$  برابر خواهد بود با:

الف) ۳۲۸۰ (ب) ۱۰۹۰ (ج) ۱۰۸۶ (د) ۳۲۷۶ (ه) ۶۵۶۰

۲۷. در حاصل ضرب  $\prod_{1 \leq i < j \leq 9} (x_i - x_j)$  ضریب جمله‌ی  $x_1^4 x_2^4 \dots x_9^4$  برابر است با:

الف) صفر (ب)  $\binom{9}{4}$  (ج)  $-\binom{9}{4}$  (د)  $9 \times \binom{9}{4} \times \binom{9}{4}$  (ه)  $-9 \times \binom{9}{4} \times \binom{9}{4}$

۲۸. تعداد زوجی بردار واحد از یک نقطه از صفحه رسم شده‌اند به طوری که یک در میان قرمز و آبی هستند. فرض کنید  $\vec{R}$  مجموع بردارهای قرمز و  $\vec{B}$  مجموع بردارهای آبی باشد. در این صورت دقیق‌ترین حکمی که می‌توان گفت چیست؟

الف)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq 2$  (ب)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq 1 + \sqrt{2}$   
 ج)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq 1 + \sqrt{3}$  (د)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq \frac{2\pi}{3}$   
 ه)  $|\vec{R} - \vec{B}| \leq \pi - 1$

۲۹. نقطه به طور دلخواه روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند. مطلوب است حداقل تعداد کمانهای کوچکتر یا مساوی  $120^\circ$  که توسط این نقاط درست می‌شود.

الف) ۱۰۰ (ب) ۱۲۰ (ج) ۱۳۲ (د) ۱۴۴ (ه) ۱۴۹

۳۰. در شکل زیر  $ABCD$  دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محاط در دایره‌ی واحد است. فرض کنید  $y > x$  در این صورت  $y - x$  برابر است با:

الف)  $(ab)^2$  (ب)  $a\sqrt{b}$  (ج)  $ab$  (د)  $b\sqrt{a}$  (ه)  $\sqrt{ab}$

