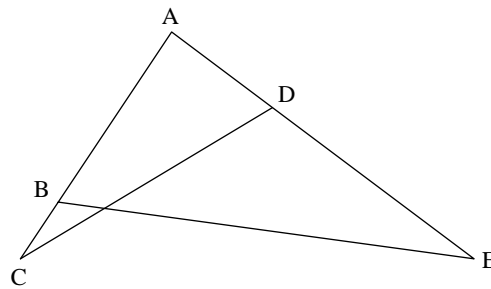


آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله‌ی $d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ که a, b, c, d اعداد طبیعی هستند و $a < b < c$ ، چند جواب دارد؟
الف) جواب ندارد (ب) ۱ (ج) ۳ (د) ۶ (ه) بینهایت
۲. در شکل زیر زوایای $\angle CDE$ و $\angle CBE$ مساوی‌اند. اگر $AD = c, BC = b, AB = a$ و $DE = d$ ، آنگاه داریم:
الف) $b(a + b) = d(c + d)$ (ب) $ab = cd$
ج) $a(a + b) = c(c + d)$ (د) $ad = cb$
ه) $c(a + b) = a(c + d)$



۳. مجموعه‌ی A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟
الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸
۴. چند عدد اول کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲ است؟
الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) بیش از ۵
۵. معادله‌ی $x^y + 1 = (x + 1)^2$ روی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۵
۶. فرض کنید که معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ دو جواب صحیح داشته باشد. عبارتهای زیر را در نظر بگیرید:
۱) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a و b فرد است.
۲) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
۳) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

- ۴) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.
- ۵) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.
- ۶) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a و b فرد است. کدام یک از عبارتهای فوق درست است؟
- الف) ۱ و ۴ (ب) ۲ و ۴ (ج) ۱ و ۵ (د) ۳ و ۵ (ه) ۲ و ۶
۷. معادله‌ی $3^n - 3 = n!$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟
- الف) یک (ب) دو (ج) سه (د) چهار (ه) بینهایت
۸. اگر ABC مثلثی باشد که $\angle A = 45^\circ$ و D نقطه‌ای روی امتداد BA باشد به قسمی که $BD = BA + AC$ و نقاط M و K به ترتیب روی AB و BC به گونه‌ای قرار داشته باشند که مساحت مثلث BDM مساوی مساحت مثلث BCK باشد آنگاه $\angle BKM$ برابر است با:
- الف) $22/5^\circ$ (ب) 30° (ج) 45° (د) 15° (ه) 20°
۹. فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$. چند تابع $f: A \rightarrow A$ وجود دارد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم:
- $$f(f(x)) = f(x)$$
- الف) ۱ (ب) ۴ (ج) ۷ (د) ۱۰ (ه) ۱۳
۱۰. مثلث ABC را با اضلاعی با طولهای صحیح a و b و c در نظر می‌گیریم و طول ارتفاعهای آن را h_a, h_b و h_c می‌نامیم. فرض کنید $h_a = h_b + h_c$. در این صورت داریم:
- الف) $a^2 + b^2 + c^2$ مربع کامل است.
- ب) $2(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است.
- ج) $3(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است.
- د) $b^2 + c^2 - a^2$ مربع کامل است.
- ه) $a^2 + b^2 - c^2$ مربع کامل است.
۱۱. فرض کنید $a = 10^{2 \times 1376} - 10^{1376} + 1$. مقدار $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$ برابر است با:
- الف) $2 \times 10^{1376} - 2$ (ب) $2 \times 10^{1376} - 1$ (ج) 2×10^{1376} (د) $2 \times 10^{1376} + 1$ (ه) $2 \times 10^{1376} + 2$
۱۲. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. نقاط D و E را به ترتیب روی AB و AC می‌گیریم به طوری که دایره‌ی محیطی مثلث ADE در نقطه‌ی X بر BC مماس باشد. اگر D و E را طوری انتخاب کنیم که DE مینیمم شود در این صورت داریم:
- الف) AX میانه است.
- ب) AX ارتفاع است.
- ج) AX نیمساز است.
- د) X بین پای نیمساز و پای میانه قرار دارد.
- ه) X بین پای نیمساز و پای ارتفاع قرار دارد.
۱۳. ۵ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه داریم. به چند طریق این مهره‌ها را می‌توانیم در یک ردیف از چپ به راست کنار هم بچینیم، به طوری که بلافاصله بعد از هر مهره‌ی سفید حداقل یک مهره‌ی سیاه قرار داشته باشد؟
- الف) ۱۲۶ (ب) ۱۳۲ (ج) ۲۱۸ (د) ۲۵۲ (ه) ۳۱۲
۱۴. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$
- $$A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک } n \text{ و } x \text{ بزرگتر از یک است}\}$$
- عدد طبیعی $n < 1$ را «خوب» می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A_n$ داشته باشیم $x + y \in A_n$. چند عدد خوب زوج داریم که کوچکتر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند؟
- الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۹ (ه) ۲۳

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. نقطه‌ی M درون مثلث ABC قرار دارد. H_1, H_2, H_3 به ترتیب پای عمودهای مرسوم از M بر BC, AC و AB می‌باشند. اگر حاصل ضرب $MH_1 \cdot MH_2 \cdot MH_3$ بیشترین مقدار ممکن خود را اختیار کند آنگاه M کدام یک از نقطه‌های زیر است؟
 الف) مرکز ارتفاعی ب) مرکز دایره‌ی محاطی ج) مرکز دایره‌ی محیطی
 د) مرکز ثقل ه) نقطه‌ای که از آن سه ضلع به یک زاویه دیده می‌شود.
۱۶. معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1376}$ با شرط $(x \leq y)$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟
 الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) جواب ندارد
۱۷. چند تابع $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ وجود دارد که برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ داشته باشیم:
 $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$
 الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه ه) بینهایت
۱۸. چند عدد اول سه رقمی \overline{abc} وجود دارد که در آن داشته باشیم $9 = 4ac - b^2$ ؟
 الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴
۱۹. در زیرمجموعه‌ی $\{(x, y) \mid 1 \leq x, y \leq 5; x, y \in \mathbb{Z}\}$ از نقاط صفحه حداکثر چند نقطه می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که فاصله‌ی دوه‌دوی این نقاط متمایز باشد؟
 الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸
۲۰. تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:
 ۱) به ازای هر $x, y \in \mathbb{N}$ داریم: $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$
 ۲) فقط به ازای تعداد متناهی x داریم: $f(x) = 1$
 ۳) $f(30) = 6$
 مقدار $f(2)$ چقدر است؟
 الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵
۲۱. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ باشند به طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی A_i و A_j حداقل ۲ عضو دارد. در این صورت بیشترین مقدار n کدام یک از مقادیر زیر است؟
 الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴ ه) ۲۵
۲۲. تعداد مقسوم‌علیه‌های هر عدد طبیعی n را با $d(n)$ نشان می‌دهیم. عدد n را «جالب» گوئیم هرگاه $d(d(d(n))) = d(d(n))$. کدام یک از احکام زیر نادرست است؟
 الف) بینهایت عدد جالب مضرب ۳ وجود دارد.
 ب) بینهایت عدد جالب زوج وجود دارد.
 ج) بینهایت عدد جالب فرد وجود دارد.
 د) اگر n جالب باشد، n^3 نیز جالب است.
 ه) اگر n جالب باشد، $d(n)$ نیز جالب است.
۲۳. اعداد حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n روی تخته نوشته شده‌اند. در هر «گام» دو تا از آنها مثل x و y را به دلخواه انتخاب کرده و آنها را حذف می‌کنیم و به جای آنها عدد $x + y + xy$ را می‌نویسیم. پس از $n - 1$ گام عدد A روی تخته باقی مانده است. کدام یک از نتیجه‌گیریهای زیر درست است؟
 الف) می‌توان مقادیر اولیه‌ی a_1, a_2, \dots, a_n را چنان تعیین کرد که با روشهای مختلف $n!$ مقدار متمایز برای A حاصل شود.
 ب) مقدار A به طور منحصر به فرد توسط a_1, a_2, \dots, a_n تعیین می‌شود.
 ج) اگر $a_1 = 2$ ، در این صورت A حتماً عددی زوج است.
 د) به تعداد متناهی مقادیر a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارد که برای آنها A می‌تواند برابر ۱ شود.
 ه) تمام گزینه‌های بالا نادرست است.

آزمون مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. ۱۳۷۶ لامپ داریم که همه در حالت اولیه خاموش هستند. این لامپها را از ۱ تا ۱۳۷۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای هر عدد صحیح و مثبت k ، سوئیچ P_k وضعیت خاموش و روشن لامپهایی که شماره‌ی آنها مضربی از k است را عوض می‌کند. سوئیچهای $P_1, P_2, \dots, P_{1376}$ را متوالیاً می‌زنیم. در آخر چند لامپ روشن می‌ماند؟

الف) ۱۳۷۶ (ب) ۱۳۳۹ (ج) ۷۶ (د) ۳۹ (ه) ۳۷

۲۵. از جدول زیر ۵ عدد انتخاب می‌کنیم به طوری که هیچ دو عددی در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند. کوچکترین این اعداد را a می‌نامیم. a حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۲۰	۲۲	۲۹	۲۱	۳۱
۱۴	۱۲	۱۵	۲۰	۷
۳	۹	۷	۱۳	۲۳
۲۳	۱۴	۱۱	۱۷	۳۱
۲۱	۲۶	۲	۴۱	۲۸

الف) ۱۴ (ب) ۱۵ (ج) ۱۶ (د) ۲۰ (ه) ۲۱

۲۶. از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 1001\}$ زیرمجموعه‌ای مانند $S \subset A$ انتخاب می‌کنیم به طوری که اگر $x, y \in S$ آنگاه $x + y \notin S$ حداکثر تعداد اعضای S چقدر است؟

الف) ۴۹۹ (ب) ۵۰۰ (ج) ۵۰۱ (د) ۵۰۲ (ه) ۵۰۳

۲۷. برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می‌دهیم (مثلاً $f(1376) = 17$). اگر $n_0 = (13)^{76}$ ، کدام یک از اعداد زیر در دنباله‌ی

$$n_0, f(n_0), f(f(n_0)), \dots, f(f(\dots(f(n_0))\dots)), \dots$$

وجود دارد؟

الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) هیچ کدام

۲۸. مثلث ABC با اضلاع $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 6$ مفروض است. نقاط A' ، B' و C' پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A ، B و C هستند. A'' ، B'' و C'' را به ترتیب محل تلاقی امتداد این ارتفاعها با دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گیریم. در این صورت $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'}$ برابر است با:

الف) ۴ (ب) ۵ (ج) $3\sqrt{2}$ (د) $2\sqrt{3} + 1$ (ه) $3\sqrt{3} - 1$

۲۹. در کدام یک از مجموعه‌های زیر عددی به صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{5^m + 5^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ (ب) $\{4^m + 4^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$
 ج) $\{6^m + 6^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ (د) $\{7^m + 7^k \mid m, k \in \mathbb{N}\}$

(ه) هیچ کدام

۳۰. معادله‌ی $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1376}} = \frac{1376}{a_1 + a_2 + \dots + a_{1376}}$ که در آن

$$1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{1376}$$

روی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) $1376!$ (د) بینهایت (ه) $2 \times (1376!)$