

آزمون مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۸

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی از ۲ باشد وجود دارد که با جابه‌جایی ارقامش توان دیگری از ۲ حاصل شود؟ چرا؟

۲. مثلث ABC را با فرض $\angle B > 45^\circ$ و $\angle C > 45^\circ$ در نظر می‌گیریم. مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین CAM و BAN را در خارج ABC طوری می‌سازیم که $\angle CAM = \angle BAN = 90^\circ$ و در داخل ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین BPC را طوری می‌سازیم که $\angle P = 90^\circ$. ثابت کنید که مثلث MPN نیز یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۳. یک زمین مربع‌شکل به شبکه‌ای 100×100 از نقاط متساوی‌فاصله تقسیم شده و تعداد ۱۰۰۰۰ عدد درخت هر کدام در یکی از نقاط این شبکه کاشته شده است. ماکزیمم تعداد درختهایی که می‌توانیم قطع کنیم را پیدا کنید که اگر در محل هر درخت بریده شده‌ای قرار بگیریم هیچ درخت بریده‌شده‌ی دیگری را نبینیم. (یعنی روی پاره‌خط واصل بین هر دو درخت بریده‌شده، درخت بریده نشده‌ای واقع باشد.)

۴. همهی عددهای طبیعی m به‌صورت زیر

$$m = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{1378}{a_{1378}}$$

را پیدا کنید که در آن $a_1, a_2, \dots, a_{1378}$ اعدادی صحیح و مثبت باشند.

۵. مثلث ABC مفروض است. نقاط P, Q, R و به‌ترتیب روی AB, BC, CA قرار دارند. حال نقاط A', B', C' را به‌ترتیب روی PR, PQ, RQ طوری در نظر می‌گیریم که AB با $A'B'$ و BC با $B'C'$ و CA با $C'A'$ موازی باشند. ثابت کنید که

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{مساحت } PQR}{\text{مساحت } A'B'C'}$$

۶. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n و n نقطه‌ی متمایز در صفحه باشند ($n \geq 2$). همهی پاره‌خطهایی که از اتصال دوبه‌دوی این نقاط به‌دست می‌آیند را در نظر می‌گیریم و وسط هر یک از این پاره‌خطها را به رنگ قرمز، رنگ می‌کنیم. حداقل تعداد نقاط قرمز به‌دست‌آمده چند تاست؟