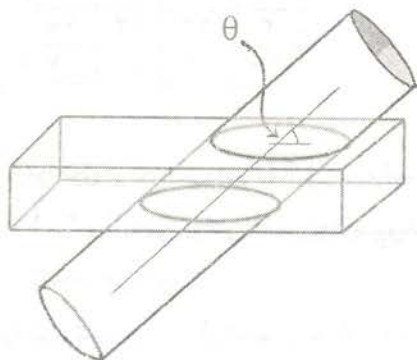


مرحله اول بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور

سال ۱۳۸۱



(۱) کیکی به شکل مکعب مستطیل به ابعاد $۱۰ \times ۲۰ \times ۵۰$ داریم. به کودکی اجازه داده شده به وسیله یک استوانه که دوسر آن باز است، از یک قطعه‌ای جدا کند؛ به این ترتیب که استوانه را با یکی از زوایای ۳۰° ، ۴۵° ، ۶۰° ، ۹۰° نسبت به سطح بزرگ وارد آن کرده و مقدار کیکی را که درون استوانه قرار می‌گیرد برای خود بردارد. در کدام حالت بیشترین مقدار کیکی را به دست می‌آورد؟

الف) $\theta = ۳۰^\circ$

ب) $\theta = ۴۵^\circ$

ج) $\theta = ۶۰^\circ$

د) $\theta = ۹۰^\circ$

ه) در همه موارد، مقدار ثابتی کیکی به دست می‌آید.

(۲) در یک چهار وجهی چهار مثلث داریم که هر کدام سه زاویه دارند. اگر از این دوازده زاویه n تای آن‌ها منفرجه باشند آنگاه

الف) n نمی‌تواند ۱ باشد. ب) n نمی‌تواند ۲ باشد. ج) n نمی‌تواند ۳ باشد.

د) n نمی‌تواند ۴ باشد. ه) هیچ کدام.

(۳) در یک ده، صد خانه ساخته شده است. هر ۱۰ خانه‌ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بام‌هایشان هست (ممکن است روی یک بام هیچ یا چند آنتن هم باشد). هر سه تا آنتنی را که در نظر بگیریم، حداقل دو کلاغ روی آن‌ها نشسته است (ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ هم باشد). این ده حداقل چند کلاغ دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۹۲ ج) ۹۳ د) ۹۸ ه) ۹۹

(۴) اگر از یک عدد سه رقمی کم‌تر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به دست آید؟

الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۳ د) ۵۵ ه) ۵۶

o	o	o	o
o	o	o	o
o	o	o	o
o	o	o	o

(5) در هر مرحله 4 خانه از جدول روبرو انتخاب می‌کنیم به طوری که از هیچ سطر یا ستونی 2 خانه انتخاب نشده باشد. عددهای هر 4 خانه را یک واحد اضافه یا از هر یک، یک واحد کم می‌کنیم. با این روش به کدام یک از جدول‌های زیر می‌توان رسید؟

4	3	2	1
4	3	1	2
3	2	1	4
1	3	4	2

(ج)

20	o	o	13
o	17	4	7
10	5	10	11
o	6	11	13

(ب)

-21	o	-6	3
-6	10	27	27
20	7	7	4
3	23	10	4

(الف)

15	17	3	15
16	13	13	6
14	13	15	8
3	5	19	21

(ه)

10	17	2	21
17	17	14	2
3	13	24	10
20	3	10	17

(د)

(6) هر مولکول از تعدادی اتم تشکیل شده است. بین هر دو اتم یک ملکول، تعدادی پیوند وجود دارد. این تعداد می‌تواند 0، 1، 2 و یا حتی بیشتر باشد. تعداد پیوندهای بین اتم‌های x و y در مولکول‌های مختلف عددی ثابت و وابسته به x و y است. می‌دانیم:

- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b و c دارای 5 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b و d دارای 7 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, c و d دارای 3 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b, c و d دارای 5 پیوند است.
- مولکول تشکیل شده از اتمهای a, b, c, d چند پیوند دارد؟

(الف) 6

(ب) 10

(ج) 12

(د) 15

(ه) مساله جواب منحصر به فرد ندارد.

(7) مولکول تشکیل شده توسط 10 اتم x_1, x_2, \dots, x_{10} را در نظر بگیرید. می‌دانیم این مولکول 43 پیوند دارد و در ضمن بین هر دو اتم از این مولکول حداکثر یک پیوند موجود است. می‌گوییم سه اتم x_i, x_j, x_k تشکیل یک مثلث می‌دهند، هرگاه بین هر دو تا از آنها پیوند موجود باشد. فرض کنید تعداد مثلث‌های این مولکول برابر t باشد. کدام گزینه صحیح است؟

(ج) $103 \leq t \leq 105$

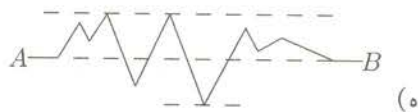
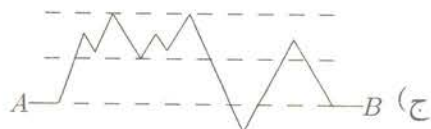
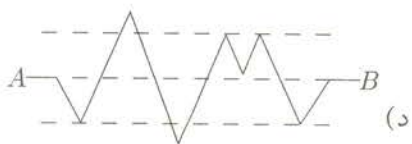
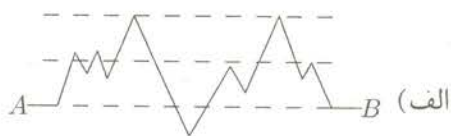
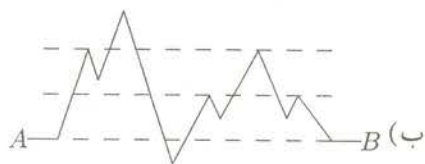
(ب) $99 \leq t \leq 102$

(الف) $96 \leq t \leq 98$

(ه) $109 \leq t \leq 112$

(د) $106 \leq t \leq 108$

(8) شیرین در نقطه A و فرهاد در نقطه B ایستاده است. آنها می‌خواهند از کوه‌ها و دره‌ها عبور کنند و به هم برسند، ولی هیچ کدام از آنها نمی‌خواهد بالاتر از دیگری قرار گیرد. به همین منظور طوری حرکت می‌کنند که در هر لحظه هم ارتفاع باشند. در کدام یک از کوهستان‌های زیر فرهاد و شیرین به هم می‌رسند؟



۹) فرض کنید x_1, x_2, x_3, x_4 اعدادی صحیح و نامنفی باشند، به طوری که مجموع آنها برابر ۱۶ باشد و

$$A = (2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4)(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)(2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4)(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$

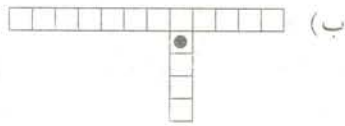
اگر بیشترین مقدار A برابر M باشد در چند حالت داریم، $A = M$ ؟

- (الف) تعداد حالات تساوی ۱ است.
- (ب) تعداد حالات تساوی ۶ است.
- (ج) تعداد حالات تساوی ۹ است.
- (د) تعداد حالات تساوی نامتناهی است.
- (ه) A بی کران است و بیشترین مقدار ندارد.

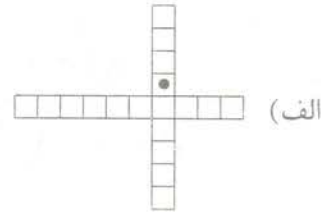
۱۰) به چند طریق می توان در هر یک از خانه های یک جدول 3×3 یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را نوشت طوری که مجموع اعداد در هر سطر و هر ستون برابر ۲ شود؟

- (الف) ۱۵ (ب) ۱۸ (ج) ۲۱ (د) ۲۴ (ه) ۲۷

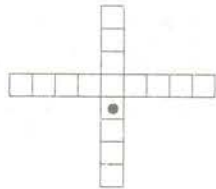
۱۱) در یک بازی دو نفره بازیکنان می خواهند به خانه ای که در آن شکلات قرار دارد برسند. قانون این بازی این است که هر بازیکن در نوبت خود خانه ای از جدول را که سه ضلع آزاد دارد، برمی دارد. در کدام یک از زمین های بازی زیر بازیکن دوم می تواند همیشه برنده باشد؟



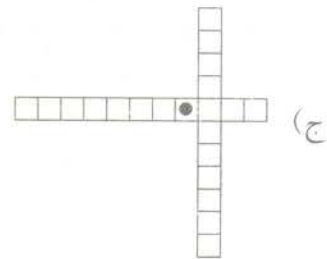
(ب)



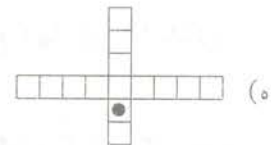
(الف)



(د)



(ج)



(ه)

۱۲) زیرمجموعه A از اعداد طبیعی را ضعیف می‌نامیم؛ هرگاه مجموع هیچ دو عضوی از A بر عضوی از A بخش‌پذیر نباشد. در ضمن، یک مجموعه ضعیف را بزرگ می‌نامیم؛ هرگاه هیچ زیرمجموعه ضعیف دیگری شامل آن نباشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (الف) نامتناهی مجموعه ضعیف نامتناهی داریم.
- (ب) مجموعه ضعیف نامتناهی وجود دارد که بزرگ است.
- (ج) نامتناهی مجموعه ضعیف متناهی داریم که بزرگ هستند.
- (د) مجموعه ضعیف نامتناهی وجود دارد که همه اعضای آن بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیرند.
- (ه) مجموعه‌ای ضعیف وجود دارد که از هر سه عدد متوالی حداقل یکی را دارا است.

۱۳) به چند طریق می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول 4×4 یکی از دو عدد ۰ و ۱ را نوشت به طوری که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون برابر ۲ شود؟

- (الف) ۸۳ (ب) ۴۴ (ج) ۵۴ (د) ۹۰ (ه) ۷۸

۱۴) فرض کنید A یک مجموعه ۱۰ عضوی و B زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد. تعداد زیرمجموعه‌هایی (مانند C) از مجموعه A که $B \cap C$ تعداد فردی عضو داشته باشد برابر است با:

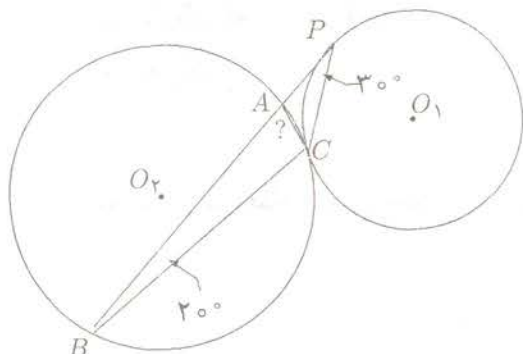
الف) ۵۹۶

ب) ۵۱۲

ج) ۴۶۴

د) ۳۴۸

ه) بستگی به تعداد اعضای B دارد.



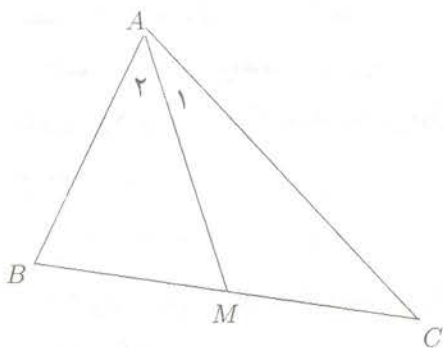
۱۵) در شکل مقابل BP بر دایره (O_1) مماس است. داریم: $\widehat{APC} = 30^\circ$ و $\widehat{CBA} = 20^\circ$. همچنین دایره (O_2) و (O_1) بر هم مماس اند. اندازه \widehat{BAC} کدام است؟

- الف) 80° ب) 130° ج) 60°
 د) 50° ه) 140°

۱۶) در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ داریم: $AB = 3, BC = DA = 2, CD = 4$. طول قطر BD چقدر است؟

- الف) ۵ ب) $\frac{7}{4}$ ج) $2\sqrt{3}$ د) $\frac{17}{4}$ ه) ۴

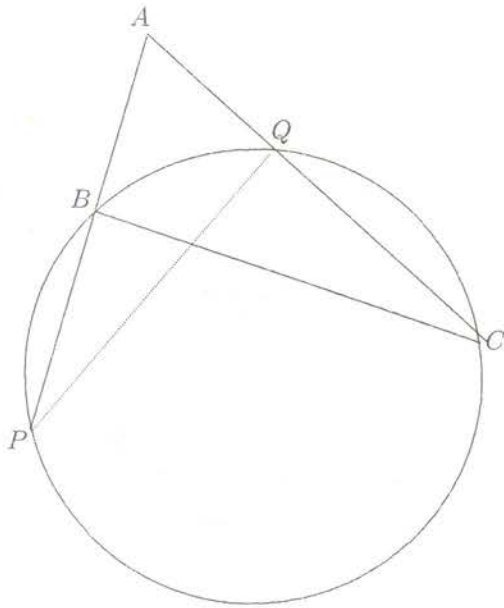
۱۷) در شکل روبه رو زاویه $\widehat{A_2}$ دو برابر زاویه $\widehat{A_1}$ است و داریم: $AB = 1$ و $AC = \sqrt{3}$ و AM میانه BC است. طول BC کدام است؟



- الف) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ج) ۲
 د) $\sqrt{3}$ ه) $\frac{3}{2}$

۱۸) در مثلث ABC ، $\widehat{A} = 120^\circ$ و مجموع دو ضلع AB و AC برابر ۱۰ است. در مورد ضلع BC چه می توان گفت؟

- الف) $BC < 9$ ب) $BC \geq 5\sqrt{3}$ ج) $5 \leq BC \leq 9$
 د) $5\sqrt{3} \leq BC \leq 9$ ه) $\frac{11}{2} \leq BC \leq \frac{17}{2}$



۱۹) در مثلث ABC دایره‌ی را در نظر بگیرید که از رئوس B و C می‌گذرند و AB و AC یا امتداد آن‌ها را در نقاطی مثل P و Q قطع می‌کنند. مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی مانند PQ کدام می‌باشد؟

- الف) عمود منصف BC .
- ب) خطی که از A می‌گذرد.
- ج) قسمتی از دایره‌ای که از B و C می‌گذرد.
- د) دایره‌ای که از A می‌گذرد.
- ه) هیچ‌کدام

۲۰) معادله‌ی زیر در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

$$x^2 + y^5 = 1381 + z^2$$

- الف) صفر
- ب) ۲
- ج) ۴
- د) ۸
- ه) بی‌نهایت

۲۱) فرض کنید n عددی طبیعی باشد، مقسوم علیه d از n را خوب می‌گوییم، اگر $(d, \frac{n}{d}) = 1$. فرض کنید $f(n)$ نماینده‌ی مجموع مقسوم علیه‌های خوب n باشد و S مجموعه‌ی اعداد طبیعی مانند m باشد که $f(m) - 2$ مضرب ۴ است و $1 \leq m \leq 1000$. کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

- الف) عضوی از S وجود دارد که بر ۳۰ بخش پذیر است.
- ب) عضوی از S به شکل $4k + 3$ است.
- ج) هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد.
- د) عضوی از S وجود دارد که تعداد عوامل اول آن ۴ است.
- ه) هیچ‌کدام.

۲۲) فرض کنید f و g دو تابع از N به R باشند. می‌گوییم $f \triangleleft g$ اگر عدد طبیعی N وجود داشته باشد که برای هر $n > N$ ، $f(n) < g(n)$ اگر:

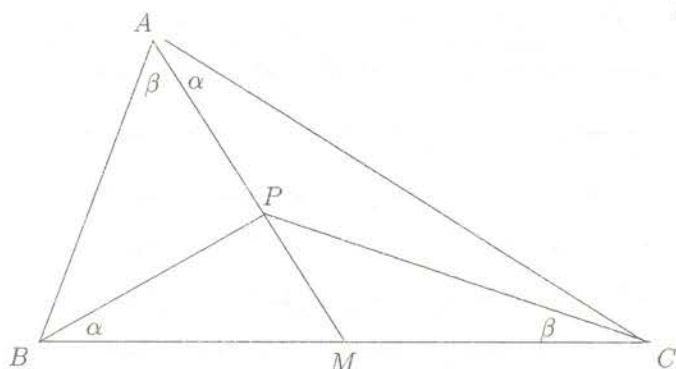
$$f_1(n) = (10^n)!$$

$$f_2(n) = 2^{n!}$$

$$f_3(n) = \sqrt[n]{(n!)}$$

کدام گزینه صحیح است؟

- الف) $f_1 \triangleleft f_2 \triangleleft f_3$
- ب) $f_2 \triangleleft f_1 \triangleleft f_3$
- ج) $f_2 \triangleleft f_3 \triangleleft f_1$
- د) $f_1 \triangleleft f_3 \triangleleft f_2$
- ه) $f_2 \triangleleft f_3 \triangleleft f_1$



۲۳) در مثلث ABC ، AM میانه است. نقطه P روی AM چنان قرار گرفته است که

$$\widehat{PAC} = \widehat{PBC} = \alpha$$

$$\widehat{PAB} = \widehat{PCB} = \beta$$

اگر $\alpha + \beta = 80^\circ$ زاویه \widehat{CPA} چقدر است؟

الف) 130°

ب) 120°

ج) 140°

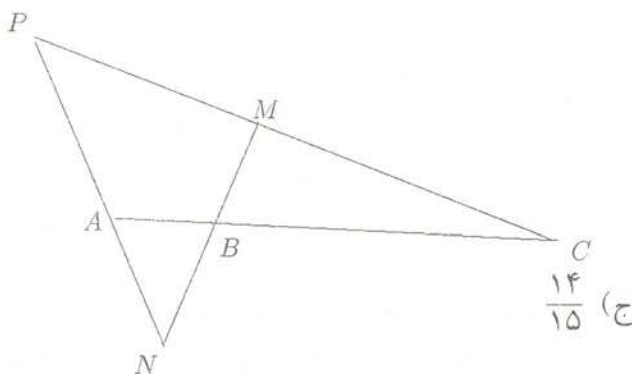
د) $120^\circ < \widehat{CPA} < 130^\circ$

ه) تمام مقادیر بین 120° و 140° می‌تواند باشد.

۲۴) در شکل روبرو $BM = BN$. اگر داشته باشیم

$$\frac{S_{BMC}}{S_{APC}} = \frac{4}{49}$$

مطلوبست مقدار $\frac{AB}{AC}$.



الف) $\frac{4}{49}$

ب) $\frac{2}{7}$

ج) $\frac{14}{15}$

د) $\frac{3}{7}$

ه) $\frac{2}{3}$

۲۵) بزرگ‌ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت یک محاط شود چه مساحتی دارد؟

الف) $\frac{1}{4}$

ب) $\frac{1}{3}$

ج) $\frac{2}{3}$

د) $\frac{2}{3}$

ه) $\frac{3}{4}$

۲۶) داخل یک نیم کره و صفحه گذرنده از دایره عظیمه آن را آینه کرده‌ایم. پرتوی را در نظر بگیرید که از نقطه‌ای روی نیم کره به سوی درون آن تابیده می‌شود. فرض کنید اگر پرتو به مرز دایره عظیمه برخورد کند روی همان مسیر برگردد. (توجه کنید که بردار عمود بر سطح، پرتو تابش و بازتابش همواره در یک صفحه‌اند و هر پرتو که به نیم کره برخورد می‌کند چنان منعکس می‌شود که نیمساز بین پرتو تابش و بازتابش از مرکز کره بگذرد.

الف) مسیر این پرتو به مرز دایره عظیمه میل می‌کند.

ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم کره و دایره عظیمه آن به دلخواه نزدیک می‌شود.

ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.

د) مسیر این پرتو به ازای نامتناهی جهت تابش، متناوب است.

ه) مسیر این پرتو تنها به ازای متناهی جهت تابش، متناوب است.

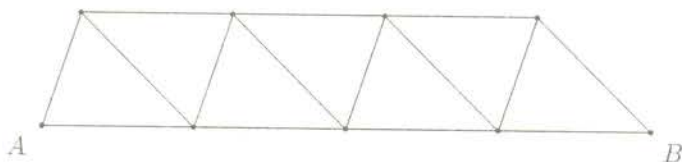
۲۷) خرج نگهداری فیل خیلی زیاد است به همین دلیل رییس باغ وحش شهر خسیس‌ها تصمیم می‌گیرد اگر دو فیل هم شکل داشته باشد، یکی از آن‌ها را بفروشد. به نظر وی دو فیل وقتی هم شکل‌اند که در مقایسه طول خرطوم و طول

دم آن‌ها با هر فیل دیگری که در باغ وحش وجود دارد، هر دو به نتایج یکسانی برسند. یعنی برای مثال، اگر با فیل خاصی مقایسه شوند طول خرطوم هر دو از خرطوم آن کوتاه‌تر باشد و طول دم هر دو از طول دم آن بلندتر باشد. پس از عملیات فروش، وقتی دیگر هیچ دو فیلی هم شکل نیستند کدام یک از گزینه‌ها صحیح است؟

(توجه کنید که طول خرطوم یا دم هیچ دو فیلی برابر نیست.)

- الف) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.
- ب) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۵ فیل باقی بماند.
- ج) ممکن است ۴ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۳ فیل باقی بماند.
- د) ممکن است ۵ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.
- ه) ممکن است هر تعداد بیش‌تر یا مساوی ۳ فیل باقی بماند.

۲۸) در شکل زیر به چند طریق می‌توانیم از نقطه A به نقطه B برویم به طوری که از هیچ نقطه‌ای دوبار عبور نکنیم؟



- الف) ۸۱
- ب) ۷۲
- ج) ۶۱
- د) ۵۲
- ه) ۴۴

۲۹) دنباله $\{x_n\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم $x_0 = t$ و به ازای $n \geq 0$ $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ چند $t \in [-1, 1]$ وجود دارد که $x_{11} = 1$ ؟ (راهنمایی: $\cos 2\theta + 1 = 2\cos^2 \theta$)

- الف) چنین t ای وجود ندارد.
- ب) تنها یک t با این خاصیت وجود دارد.
- ج) تعدادی چنین t هایی بین صد و هزار است.
- د) بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد.
- ه) نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد.

۳۰) فرض کنید $p(x) = x^2 + a$ که a یک عدد حقیقی و ثابت است. معادله $p(p(x)) = x$ را در نظر بگیرید.

- الف) این معادله چهار جواب دارد اگر و تنها اگر $a < \frac{2}{3}$.
- ب) این معادله همواره جواب دارد.
- ج) به ازای $a = \frac{1}{4}$ این معادله دو جواب دارد.
- د) به ازای $a > 0$ این معادله جواب ندارد.
- ه) الف و ب