

مرحله دوم بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور

(۱) عدد طبیعی n را سه لایه‌ای می‌نامیم هرگاه بتوان مجموعهٔ مقسوم علیه‌های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف) عددی سه لایه‌ای مثال بزنید،

ب) ثابت کنید بی نهایت عدد سه لایه‌ای وجود دارد.

(۲) در یک روستا n خانه وجود دارد ($n \geq 3$) به طوری که همهٔ آن‌ها روی یک خط قرار ندارند. می‌خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطهٔ A مناسب تراز نقطهٔ B است اگر مجموع فواصل A تا خانه‌ها کم تر از مجموع فواصل B تا خانه‌ها باشد. نقطه‌ای را ایده‌آل می‌گوییم که هیچ نقطه‌ای مناسب تراز آن وجود نداشته باشد. ثابت کنید حداکثر یک نقطه ایده‌آل برای احداث منبع آب وجود دارد.

(۳) n تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده‌اند. برای هر دو تیم متمایز مانند A, B ، دقیقاً t تیم وجود دارند که از هر دو تیم A, B باخته‌اند. ثابت کنید $n = 4t + 3$.
(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد.)

مرحله دوم بیست و یکمین المپیاد ریاضی کشور

(۴) برای هر سه عدد حقیقی x, y, z با شرط $xyz = -1$ ، نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3(x + y + z) \geq x^2/y + x^2/z + y^2/z + y^2/x + z^2/x + z^2/y$$

(۵) زاویه \hat{A} کوچک ترین زاویه مثلث ABC می باشد. نقطه D روی کمان کوچک تر BC از دایره محیطی مثلث ABC واقع است.

عمود منصف های AB, AC با خط AD به ترتیب در نقاط M, N برخورد می نمایند. نقطه T محل برخورد CN, BM است. ثابت کنید

$$BT + CT \leq 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث ABC است.

(۶) یک روبات از یک رأس دل خواه روی صفحه شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت های اصلی روی اضلاع صفحه شطرنجی حرکت می کند. این روبات دارای دو خانه حافظه A, B است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد.

در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال، جنوب، شرق یا غرب باشد، به ترتیب، به خانه A یکی اضافه می شود، از خانه A یکی کم می شود، به خانه B به اندازه عدد خانه A اضافه می شود یا از خانه B به اندازه عدد خانه A کم می شود. فرض کنید روبات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود بازگردد. ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانه حافظه B ، برابر با مساحت درون شکلی است که روبات پیموده.

