

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

(۱) ضریب x^5 در چند جمله‌ای $(1 + x^4 + x^8)^2(1 + x^4 + x^8 + \dots + 1382x^{1381})^2$ چند است؟

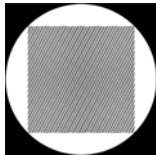
- الف) ۲۰ (ب) ۳۲ (ج) ۴۰ (د) ۶۴ (ه) ۷۰

(۲) تعداد جواب‌های حقیقی معادله $(4^x + 2^x - 6)^3 = (4^x - 2)^3 + (2^x - 4)^3$ چند است؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(۳) کدام یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته نیست؟

- الف) مجموعه اعداد مربع کامل
 ب) مجموعه اعداد مرکب
 ج) مجموعه اعدادی که بر ۱۳ بخش پذیر نیستند.
 د) مجموعه اعدادی که بر ۹۱ بخش پذیر نیستند.
 ه) مجموعه توان‌های ۳



(۴) در شکل مقابل مساحت ناحیه سیاه را با A ، مساحت ناحیه سفید را با B و مساحت ناحیه هاشور خورده را با C نشان می‌دهیم. چه رابطه‌ای بین A ، B ، و C برقرار است؟

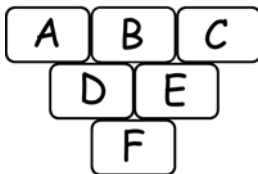
- الف) $A < B < C$ (ب) $B < A < C$ (ج) $A < C < B$ (د) $B < C < A$ (ه) $C < A < B$

(۵) A ، B ، و C سه مجموعه هستند و می‌دانیم تعداد اعضای $A - B$ ، $B - A$ ، $C - A$ ، $C - B$ ، و $C - B$ ، به ترتیب، برابر ۳، ۲، ۲، ۴، و ۵ است. تعداد اعضای $A - C$ چند است؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(۶) چند جمله‌ای $x^3 + ax + 1$ بر $x^2 - 3x + b$ بخش پذیر است. $a + 2b$ چند است؟

- الف) -۸ (ب) $-\frac{25}{3}$ (ج) ۱ (د) ۰ (ه) -۳



(۷) A ، B ، و C سه مجموعه دل‌خواه هستند و از سطر دوم به بعد، هر مجموعه تفاضل دو مجموعه بالای سر خودش است. (سمت چپ منهای سمت راست) مثلاً $D = A - B$. کدام گزینه حتماً درست است؟

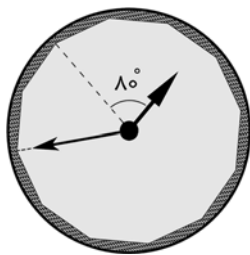
- الف) $F \subseteq C$ (ب) $B \subseteq F$ (ج) $F \subseteq A \cap C$ (د) $A \cap C \subseteq F$ (ه) $D \cap C \subseteq F$

(۸) یک ترازوی سه کفه‌ای داریم که می‌توانیم با استفاده از آن از میان سه وزنه داده شده سنگین‌ترین و سبک‌ترین وزنه را مشخص کنیم. دست کم با چند بار استفاده از این ترازو می‌توانیم از بین ۵ وزنه با وزن‌های متفاوت، وزنه میانی را پیدا کنیم؟

- الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

۹) ساعتی مطابق شکل زیر داریم که بدون شماره است. ساعت چند است؟



الف) ۹ : ۲۰

ب) ۱۰ : ۳۰

ج) ۱۱ : ۳۵

د) ۱۲ : ۴۰

ه) ۱ : ۴۵

۱۰) علی مردان خان قرار است به عنوان تنبیه از یک تا دو هزار بنویسد! عباس قلی خان (پدر وی) ساعت ۲ بعد از ظهر سری به او می زند و می بیند که تا ۶۹ را نوشته است. پس از ۵ دقیقه دوباره به وی سر می زند و مشاهده می کند که به ۱۷۹ رسیده است. تقریباً کی تکلیف علی مردان خان تمام می شود؟
(فرض کنید نوشتن هر رقم زمان ثابتی طول می کشد.)

الف) ۳ : ۲۲

ب) ۳ : ۵۲

ج) ۲ : ۳۲

د) ۴ : ۰۰

ه) ۴ : ۳۱

۱۱) توجه کنید که در این سؤال هم مثل همه سؤال های دیگر امتحان، چهار گزینه غلط و یک گزینه صحیح است!
الف) (ب) صحیح است.
ب) (ج) و (د) هر دو غلط اند.
ج) (ج) صحیح است.
د) (د) صحیح است.
ه) حداقل یکی از (ج) یا (ه) صحیح اند.

۱۲) a_1, a_2, \dots, a_{23} اعدادی طبیعی هستند و $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{23}$. در ضمن هیچ سه تا از a_i ها برابر نیستند. حداقل مقدار عبارت زیر چند است؟

$$(a_{12} + a_{13} + \dots + a_{23}) - (a_1 + \dots + a_{11})$$

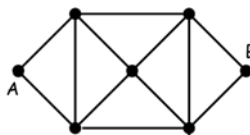
الف) ۶۶

ب) ۶۷

ج) ۶۸

د) ۷۰

ه) ۷۲



۱۳) به چند طریق می توان با شروع از رأس A و حرکت روی پاره خطها به رأس B رفت طوری که از هر رأس حداکثر یک بار عبور کنیم؟

الف) ۳۰

ب) ۲۸

ج) ۲۷

د) ۲۶

ه) ۲۴

۱۴) معادله $x^4 + 16x - 12 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

الف) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

ه) ریشه حقیقی ندارد.

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

۱۵) دو دایره C_1 و C_2 به مراکز O_1 و O_2 در دو نقطه A و B متقاطع می‌باشند. طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطه A گذشته دو دایره را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر اندازه وتر AM برابر ۴ باشد اندازه MN کدام است؟

- الف) $4 + 3\sqrt{3}$ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) $4 + 3\sqrt{\frac{12}{5}}$ (ه) $4\sqrt{5}$

۱۶) اعداد ۱ تا ۱۳۸۲ را از چپ به راست پشت سرهم نوشته‌ایم تا عدد ۱۳۸۱۱۳۸۲۰۱۳۸۰۱۳۳۰۰۰ به دست آید. باقیمانده تقسیم این عدد بر ۹ چند است؟

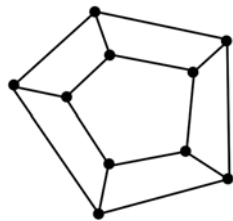
- الف) ۰ (ب) ۲ (ج) ۴ (د) ۶ (ه) ۸

۱۷) از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی به دست می‌آید. اگر اضلاع متوازی‌الاضلاع به اندازه‌های a و b باشند نسبت مساحت این چهارضلعی به مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

- الف) $\frac{|a-b|}{a+b}$ (ب) $\frac{(a-b)^2}{2ab}$ (ج) $\frac{2|a-b|}{a+b}$ (د) $\frac{|a-b|}{ab}$ (ه) $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$

۱۸) در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ و $AB = CD$. اگر محل تقاطع AC و BD باشد و $BO = 3$ و $CB = 5$ ، طول CO چقدر است؟

- الف) ۴ (ب) $\sqrt{15}$ (ج) $\sqrt{14}$ (د) ۳ (ه) $3\sqrt{2}$



۱۹) محسن به طور دل‌خواه اعداد ۱ تا ۱۰ را روی ۱۰ رأس شکل روبرو می‌گذارد و سپس روی هر پاره‌خط قدرمطلق تفاضل اعداد دوسر آن را می‌نویسد. حداقل چند عدد متفاوت روی پاره‌خط‌ها ظاهر می‌شود؟

- الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

$$\begin{cases} 1 + a^3 + 3ab = b^3 \\ 1 + a^5 = b^5 \end{cases}$$

۲۰) دستگاه معادلات مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) نامتناهی جواب

۲۱) معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(x+1)^{1383} + (x+1)^{1382}(x-2) + (x+1)^{1381}(x-2)^2 + \dots + (x+1)(x-2)^{1382} + (x-2)^{1383} = 0$$

- الف) این عبارت همواره صفر است. (ب) ۲ (ج) ۱۳۸۳ (د) ۱ (ه) ۰

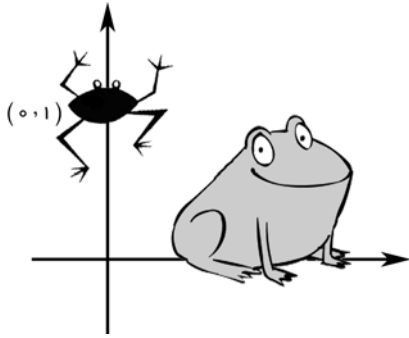
۲۲) کوچک‌ترین عددی که هم خودش و هم مجموع ارقامش بر ۵۰ بخش‌پذیر باشد چند رقم متمایز دارد؟

- الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۶ (ه) ۹

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

۲۳) حداقل چند مستطیل 2×3 باید از یک صفحه شطرنجی 8×8 جدا شود تا دیگر حتی یک مستطیل 2×3 نتوان از شکل باقی مانده جدا کرد؟

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸



۲۴) یک قورباغه در نقطه $(0, 1)$ از صفحه قرار دارد و هر بار در جهت عمود بر خطی که مبدأ مختصات را به مکان فعلی اش وصل می کند (طوری که مبدأ در سمت راستش قرار بگیرد) به اندازه فاصله همان لحظه اش از مبدأ، جهش می کند. اگر قورباغه پس از ۱۵ جهش به نقطه (a, b) برسد، a چند است؟

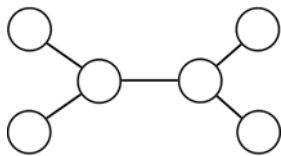
- الف) ۰ (ب) ۲۵۶ (ج) $-128\sqrt{2}$ (د) -۲۵۶ (ه) -۱۲۸

۲۵) فرض کنید فهرستی از اعداد طبیعی داده شده است. در هر مرحله می توانیم ۳ عضو متمایز این فهرست را انتخاب کرده و حاصل ضربشان را به فهرست اضافه کنیم تا فهرستی دیگر به دست آوریم. در صورتی که فهرست اولیه ما مجموعه اعداد اول باشد، کدام یک از اعداد زیر را می توان با انجام تعدادی مرحله به فهرست اضافه کرد؟

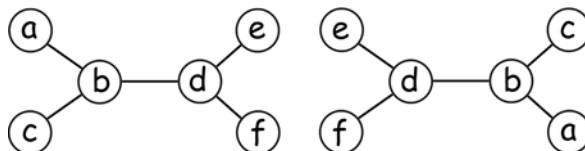
- الف) ۱۰۰۰ (ب) ۳۳۰ (ج) ۳۵۰۰۰۰ (د) ۳۷۵ (ه) ۱۰۵۰۰

۲۶) برای عدد طبیعی n فرض کنید $p(n)$ حاصل ضرب ارقام n در مبنای ۱۰ باشد. $p(1) + \dots + p(999)$ چند است؟

- الف) ۱۱۲۵۷۶ (ب) ۲۰۷۰ (ج) ۹۱۱۲۵ (د) ۹۳۱۹۵ (ه) ۱۳۲۰۷۰



۲۷) می خواهیم در دایره های شکل روبرو برچسب های a, b, c, d, e و f را بچسبانیم طوری که حروف واقع در هیچ دو دایره ای برابر نباشند. دو برچسب گذاری را متمایز گوییم هرگاه دو حرف وجود داشته باشند که دایره های شامل این دو حرف در یکی مجاور و در دیگری غیرمجاور باشند (دو دایره را مجاور گوییم هرگاه بین آن ها پاره خطی رسم شده باشد). مثلاً برچسب گذاری های زیر یکسانند.

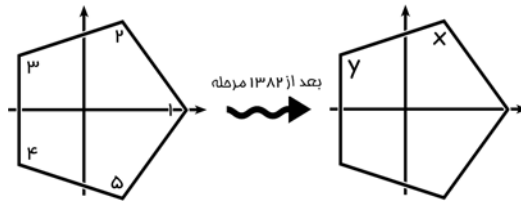


چند برچسب گذاری متمایز وجود دارد؟

- الف) ۱۸۰ (ب) ۱۲۰ (ج) ۹۰ (د) ۶۰ (ه) ۴۵

مرحله اول المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

۲۸) فرض کنید یک ۵ ضلعی منتظم مانند شکل روی محورهای مختصات قرار گرفته است. عمل زیر را روی ۵ ضلعی ۱۳۸۲ بار انجام می‌دهیم: «نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، ۷۲° در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت دوران می‌دهیم، دوباره نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.» در این صورت (x, y) چند می‌باشد؟



- الف) (۳, ۴) ب) (۱, ۵) ج) (۵, ۱) د) (۴, ۵) ه) (۵, ۴)

۲۹) مجموعه $\{7k + 5 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 800\} \cup \{7k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 1000\}$ چند عضو دارد؟

- الف) ۱۲۵۰ ب) ۱۲۵۱ ج) ۱۶۶۶ د) ۱۶۶۷ ه) ۱۸۰۰



۳۰) رستم به فرمان کیکاووس از زابلستان به قصد کشتن دیو چند سر حرکت می‌کند. اما قبل از نبرد، دیو به او هشدار می‌دهد که این کار، چندان ساده نیست: این دیو چندین سر و هر سر او تعدادی چشم دارد. اگر رستم یک سر n -چشم را ($n > 1$) قطع کند دیو به جای آن، یک سر یک چشم، یک سر دو چشم، ... و یک سر $(n-1)$ -چشم در می‌آورد!

برآورد چون شیر جنگی غریب و
سر و مغزش از گرز او گشت پست

تهمتن چو بشنید گفتار دیو
بزد بر سر دیو چون پیل مست

اگر دیو در ابتدا سه سر، با ۴، ۶، و ۸ چشم داشته باشد چند ضربه برای نابودی کامل دیو باید وارد کند؟

الف) ۱۸

ب) ۶۱

ج) ۱۶۸

د) متأسفانه رستم نمی‌تواند دیو را از پای درآورد!

ه) رستم دیو را از پای درمی‌آورد اما تعداد ضربات بستگی به روش او دارد.