

# سوالات بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور

## سال ۱۳۸۳ (مرحله‌ی دوم)

(۱) در مثلث قائم الزاویه  $\triangle ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، نقطه  $D$  محل برخورد نیمساز داخلی زاویه  $A$  با ضلع  $BC$  و نقطه  $I_a$  مرکز دایره محاطی خارجی نظیر زاویه  $A$  است. ( $I_a$  محل برخورد نیمسازهای زوایای خارجی  $B$  و  $C$  است.) ثابت کنید

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1$$

(۲) فرض کنید  $f: [0, \infty) \rightarrow R$  دارای این خاصیت است که  $f(x) - 3x$  و  $f(x) - x^3$  توابعی صعودی اند. نشان دهید  $f(x) - x^2 - x$  نیز صعودی است. (تابع  $g$  را صعودی گوئیم هر گاه اگر  $x \leq y$  آنگاه  $g(x) \leq g(y)$ )

(۳) وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یکدیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفه مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که دست کم در یکی از دو سرش نمایندگی دارد به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.



(۴) همهٔ توابع  $f: N \rightarrow N$  را بیابید که برای هر  $m, n$  طبیعی،  $m+n$  بر  $f(m) + f(n)$  بخش پذیر باشد.

(۵) نیمساز داخلی زاویهٔ  $A$  از مثلث  $\triangle ABC$ ، ضلع  $BC$  و دایرهٔ محیطی مثلث  $\triangle ABC$  را، به ترتیب، در  $D$  و  $M$  قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطهٔ  $D$  دایرهٔ به مرکز  $M$  و به شعاع  $MB$  را در  $X$  و  $Y$  قطع کرده است. ثابت کنید خط  $AD$  زاویهٔ  $\widehat{XAY}$  را نصف می‌کند.

(۶) مهرهٔ تمساح در جدول  $m \times n$  ( $m \geq 4$ ) می‌تواند همهٔ خانه‌های هم‌ستون خودش و هم‌مین‌طور خانه‌های مجاور هم‌سطر خودش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهرهٔ تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که همهٔ تمساح‌ها باید عمودی باشند.)

