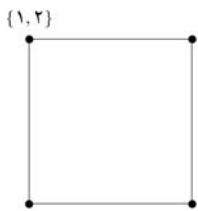


(۱) می‌خواهیم عدد ۷۲ را طی چند مرحله به عدد ۱ تبدیل کنیم. در هر مرحله مجازیم عددی که تا این مرحله به دست آمده را بر ۲ یا ۳ تقسیم کنیم. این کار به چند طریق ممکن است؟

الف) پنج ب) شش ج) ده د) دوازده ه) پانزده

(۲) فرض کنید ℓ_1 و ℓ_2 دو خطاند که با یکدیگر زاویه 70° می‌سازند. اگر دایره‌ای بر این دو خط در نقاط P و Q مماس شده و A نقطه‌ای روی آن دایره باشد، آنگاه اندازه زاویه PAQ برابر با کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

الف) 35° ب) 45° ج) 55° د) 125° ه) 145°



(۳) به چند طریق می‌توان روی هر یک از سه رأس باقی‌مانده از مربع روبه‌رو، زیرمجموعه‌ای دو عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ را قرار داد به طوری که زیرمجموعه‌هایی که روی دو رأس مجاور از مربع قرار دارند دقیقاً یک عضو مشترک داشته باشند و زیرمجموعه‌هایی که روی دو سر یک قطر مربع قرار دارند، اشتراک نداشته باشند؟

الف) ۵۶ ب) ۶۴ ج) ۹۰ د) ۱۱۲ ه) ۱۲۸

(۴) پس از بسط دادن $(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 9x^8 + 10x^9)^2$ ، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۰

(۵) یک مستطیل 10×20 در نظر بگیرید که با پاره‌خط‌های موازی با اضلاع مستطیل به 200 مربع به ضلع واحد تقسیم شده است. به هر نقطه در شکل حاصل که از تقاطع این پاره‌خط‌ها با اضلاع به دست می‌آید یک رأس می‌گوییم (پس این شکل 11×21 رأس دارد). به چند طریق می‌توان سه پاره‌خط به طول واحد انتخاب کرد که هر سه در یک رأس مشترک باشند؟

الف) ۵۶ ب) ۱۷۱ ج) ۲۲۷ د) ۶۸۴ ه) ۷۴۰

(۶) حاصل عبارت $\sqrt{(45 + 4\sqrt{41})^3} - \sqrt{(45 - 4\sqrt{41})^3}$ کدام است؟

الف) ۵۰۸ ب) ۵۰۴ ج) $4\sqrt{41}$ د) $106\sqrt{41}$ ه) $90\frac{3}{2}$

۷) دنباله a_1, a_2, a_3, \dots دارای این ویژگی است که برای هر دو عدد طبیعی m و n ، $a_{mn} = a_m + a_n$. اگر $a_7 = 7$ ، $a_{15} = 9$ و $a_{1000} = 36$ ، آنگاه مقدار a_{30} کدام است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۲۱ ه) اطلاعات مسأله کافی نیست.

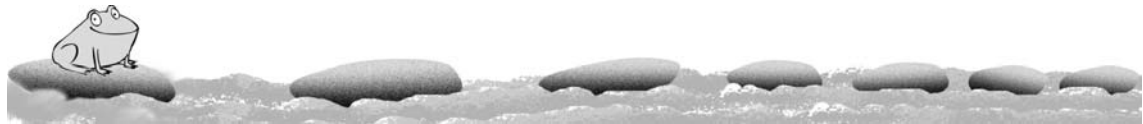
۸) می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهم‌رنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهم‌رنگ a و b ، باقیمانده a و b بر ۲۱ متفاوت باشد. کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم چند تاست؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۷ د) ۲۱ ه) ۱۴۷

۹) می‌دانیم $a > 1$ ، $b \neq 0$ ، $ab = a^b$ و $\frac{a}{b} = a^{3b}$. مقدار b^{-a} برابر کدام عدد است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) ۰ ج) ۱ د) ۴ ه) ۱۶

۱۰) در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره یک نشسته است. فاصله سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ i ام باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلوتر بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشتن به سمت چپ، به سنگ شماره ۷ برود؟



الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۴

۱۱) در کدام یک از حالت‌های زیر نیمسازهای زاویه‌های A و C از چهارضلعی محدب $ABCD$ موازی‌اند؟

الف) دو ضلع AB و CD موازی باشند.

ب) دو قطر چهارضلعی عمود برهم باشند.

ج) زاویه‌های B و D با هم برابر باشند.

د) چهارضلعی محاطی باشد.

ه) چهارضلعی محیطی باشد.

۱۲) ضریب x^5 در چندجمله‌ای $(x+1)(x+2)\dots(x+7)$ ، پس از بسط دادن، چند است؟

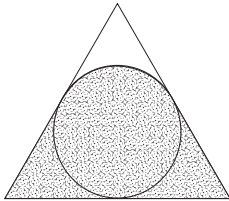
الف) ۳۲۲ ب) ۱۶۱ ج) ۶۴۴ د) ۴۸۳ ه) ۵۰۴۰

۱۳) به ازای چند عدد طبیعی n ، $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ عددی اول است؟ $[x]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x .

الف) یک (ب) دو (ج) سه (د) بی‌نهایت (ه) چنین عددی وجود ندارد.

۱۴) شکل مقابل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ و دایره‌ای مماس بر

اضلاع آن را نشان می‌دهد. مساحت قسمت رنگ شده برابر است با



الف) $\pi + 6\sqrt{3}$ (ب) $\pi + \sqrt{3}$ (ج) $\pi + 5\sqrt{3}$

د) $\frac{\pi}{4} + 2\sqrt{3}$ (ه) $\frac{\pi}{4} + 4\sqrt{3}$

۱۵) می‌خواهیم بین پنج شهر A, B, C, D و E تعدادی جاده احداث کنیم به طوری که بین هر دو شهر حداکثر یک

جاده احداث شود و از شهرهای A, B, C, D و E به ترتیب ۳، ۲، ۲ و ۱ جاده خارج شود. به چند طریق

می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) چنین کاری ممکن نیست.

۱۶) عددی را که نمایش آن در مبنای ۹ به شکل $(\overline{xyzyxyz})_9$ باشد، عدد دوقلو می‌نامیم. اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه

مشترک همه اعداد دوقلو برابر d باشد، چند مقسوم‌علیه اول دارد؟ (توجه داشته باشید که x, y و z رقم‌هایی بین

۰ و ۸ هستند.)

الف) صفر (ب) یک (ج) دو (د) سه (ه) چهار

۱۷) اگر

$$A = \left\{ \sqrt{2} - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}, \quad D = \left\{ \frac{m}{4^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

کدام یک از مجموعه‌های زیر بزرگ‌ترین عضو دارد؟

الف) $C \cap D$ (ب) $A \cup B$ (ج) $C \cup A$ (د) $\mathbb{R} - D$ (ه) B

۱۸) دست‌کم چند عضو باید از مجموعه $\{1, 2, \dots, 28\}$ حذف کنیم تا حاصل ضرب اعضای باقی‌مانده مربع کامل

شود؟

الف) یک (ب) دو (ج) چهار (د) پنج (ه) بیست و سه

۱۹) مجموعه‌های A_k ، $k \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} A_1 = \text{مجموعه اعداد اول} \\ A_{k+1} = \{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{k+1} \mid a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in A_k\} \end{cases}$$

توجه کنید که a_1, a_2, \dots و a_{k+1} لزوماً متمایز نیستند. کدام یک از اعداد زیر، دست‌کم عضویکی از A_k ها است؟

الف) $3^7 \times 2^{243}$ (ب) $5^{25} \times 2^{25}$ (ج) $7^{25} \times 2^{231}$ (د) $3^9 \times 2^{111}$ (ه) $5^6 \times 3^{12} \times 2^{60}$

۲۰) می‌خواهیم خانه‌های خالی جدول زیر را با اعداد صحیح پر کنیم به طوری که جمع عددهای هر سه خانه متوالی، مقداری ثابت باشد و به علاوه جمع همه اعداد جدول برابر ۲۱۷ شود.

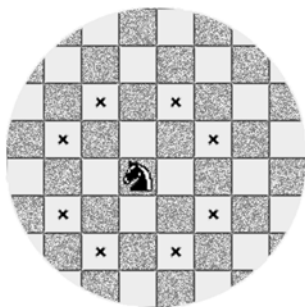
			۱۷			۲۰			?	
--	--	--	----	--	--	----	--	--	---	--

در خانه دارای علامت سؤال چه عددی می‌تواند باشد؟

الف) ۱۰ (ب) ۱۳ (ج) ۱۷ (د) ۲۰ (ه) ۲۵

۲۱) دامنه تعریف عبارت $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{\dots \sqrt{1 - x}}}}$ ، که در آن تعداد رادیکال‌ها ۱۰ تاست، چیست؟

الف) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ (ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ (د) $\{1\}$ (ه) $\{0\}$



۲۲) مهره اسبی در خانه وسط یک صفحه شطرنجی 99×99 قرار گرفته

است. همان‌طور که احتمالاً می‌دانید حرکت اسب به صورت L است؛

در شکل روبه‌رو اسب می‌تواند با یک حرکت به هر یک از خانه‌های

علامت‌زده شده برود. فرض کنید اسب در هر حرکت تنها مجاز است

به یکی از خانه‌هایی که قبلاً در آن نبوده است، برود. با کم‌ترین

تعداد، با چند حرکت می‌توان اسب را به وضعیتی رساند که دیگر قادر به حرکت نباشد؟

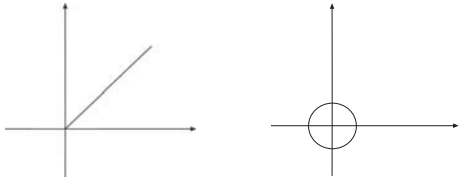
الف) ۸ (ب) ۱۵ (ج) ۱۶ (د) ۱۷ (ه) $99^2 - 1$

۲۳) معادله $5^{2(x+1)} + 621 \times 10^x = 100 \times 4^x$ در مجموعه اعداد صحیح چند جواب دارد؟

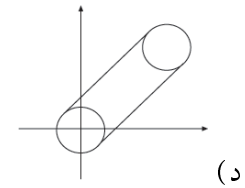
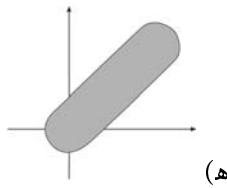
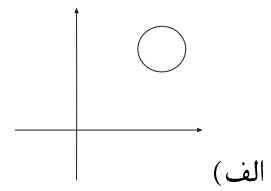
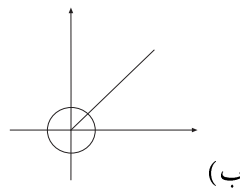
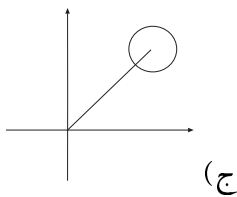
الف) یک (ب) دو (ج) سه (د) بی‌نهایت (ه) جواب ندارد.

۲۴) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه $A \oplus B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$$

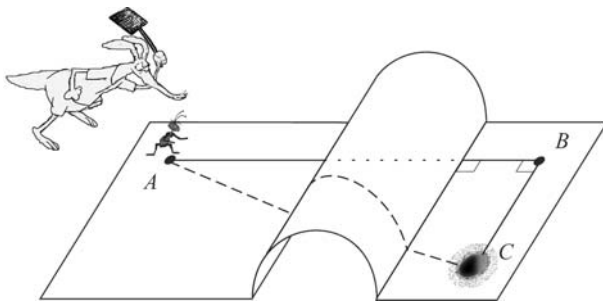


اگر A و B پاره خط و دایره نشان داده شده در شکل مقابل باشند، آنگاه $A \oplus B$ کدام یک از شکل‌های زیر خواهد بود؟



۲۵) قطر یک زیرمجموعه از صفحه یعنی بزرگ‌ترین فاصله بین نقاط آن. به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دو مجموعه A و B برابر d است. کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار قطر $A \oplus B$ چه قدر است؟ ($A \oplus B$ همان است که در سؤال قبل تعریف شده است.)

(الف) d و d (ب) $\sqrt{2}d$ و $\sqrt{3}d$ (ج) d و $2d$ (د) $\sqrt{2}d$ و $2d$ (ه) $2d$ و $3d$



۲۶) در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه است

$$BC = 6 \text{ و } AB = 10 - \pi \text{ و } (\hat{B} = 90^\circ)$$

نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر

AB ، بین نقاط A و C مانع شده است. مورچه بنا به

دلایلی (!) باید هرچه سریع‌تر از نقطه A به لانه‌اش در نقطه C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با

(الف) $\sqrt{136}$ (ب) $\sqrt{136} - \pi$ (ج) 10 (د) $7 + \pi$ (ه) 11

۲۷) کاغذی مستطیل شکل را چندین بار تا کرده ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان پذیر است. در نهایت، همه تاها را باز کرده ایم و دیده ایم در مجموع ۳۱۸ خط تای افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ (ب) ۱۴ (ج) ۱۵۹ (د) ۳۱۷ (ه) ۳۱۸

۲۸) فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $1 + 2a$ ، $2 + 3a$ ، $3 + 4a$ و یا $4 + 5a$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام یک از اعداد زیر، می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $1 - 30^{1383}$ رسید؟

الف) ۱۰ (ب) ۱۱ (ج) ۱۲ (د) ۱۳ (ه) هیچ کدام

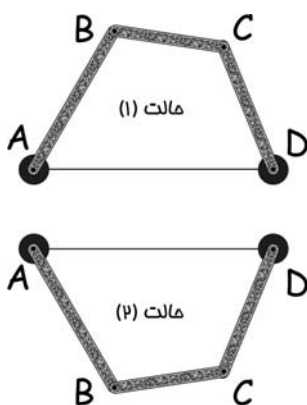
0 123456789

۲۹) ساعت دیجیتالی زمان را به کمک چهار رقم نشان می‌دهد

(از 00:00 تا 23:59) که شکل ارقام آن به صورت مقابل

است. چند بار در طول یک شبانه روز تصویر آینه‌ای ساعت، نیز زمانی معنادار را نشان می‌دهد؟ (توجه کنید که تصویر آینه‌ای 1 را با خودش یکی می‌گیریم.)

الف) ۶۲۵ (ب) ۱۴۴ (ج) ۱۲۱ (د) ۲۵۶ (ه) ۱۶۹



۳۰) سه قطعه چوب AB ، BC و CD مطابق شکل روی نقاط B و C به گونه‌ای

به هم متصل شده‌اند که می‌توانند به راحتی حول نقطه اتصال خود بچرخند

ولی نقاط A و D همیشه ثابت هستند. می‌دانیم از حالت (۱) می‌توان به

حالت (۲)، قرینه حالت (۱) نسبت به خط AD ، رسید و در حین حرکت،

همه نقاط، داخل صفحه باقی می‌مانند. اگر $AD = 10^\circ$ ، طول BC ، CD و

AB چه اعدادی می‌تواند باشد؟

الف) ۸ و ۳، ۹ (ب) ۷ و ۲، ۸ (ج) ۷ و ۲، ۶ (د) ۶ و ۱، ۶ (ه) ۶ و ۳، ۵