



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱. در آزادراه زنجان-تبریز از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ صبح ۲۳۷۰ خودرو از عوارضی عبور کرده‌اند که همه آنها تک‌سرنشین یا دو سرنشین بوده‌اند. این خودروها در مجموع ۱۸۳۲۰ لیتر بنزین در مسیر مصرف کرده‌اند. می‌دانیم هر خودروی تک‌سرنشین، ۷ لیتر و هر خودروی دوسرنشین، ۸ لیتر بنزین در این مسیر مصرف کرده است. تعداد کل خودروهای تک‌سرنشین چند تاست؟

- (۱) ۳۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۱۰۵۰ (۵) ۱۱۸۵

۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$ ، نقاط X و Y روی پاره‌خط AC طوری قرار گرفته‌اند که X بین A و Y قرار دارد و به علاوه $BY = AX = BX$. اگر $\angle YBC = 10^\circ$ ، زاویه $\angle BAC$ چند درجه است؟

- (۱) $\frac{95}{3}$ (۲) ۳۸ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱ (۵) $\frac{185}{4}$

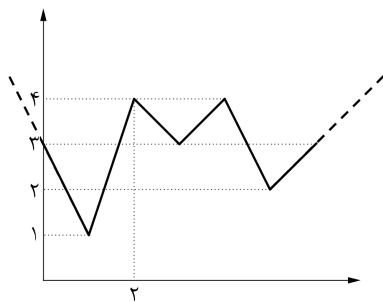
۳. x و y دو عدد حقیقی هستند که $2^{x+1} = 18$ و $3^{-y} = 2$. مقدار xy چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) $-\frac{1}{3}$ (۵) $\frac{1}{3}$

۴. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۳۹۳ مثل a وجود دارد که $\underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_{a \text{ بار}}$ مربع کامل باشد؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۶۹۶ (۳) ۷۱۵ (۴) ۷۳۳ (۵) ۷۳۴

۵. نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در پایین می‌بینید. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی است که برای هر عدد حقیقی x ، $g(x) \leq f(x)$. حداکثر مقدار $g(2)$ کدام است؟



- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳
(۵) ۴



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۶. در شهر نیستان قیمت نی‌ها با افزایش طول نی زیاد می‌شود. تاجری در شکرستان قصد وارد کردن نی از نیستان را دارد. در شکرستان لیوان‌ها به شکل مخروط ناقص با ارتفاع ۱۶ سانتی‌متر، قطر دهانه ۱۰ سانتی‌متر و قطر انتهای ۶ سانتی‌متر هستند. تاجر قصد دارد کم‌ترین پول را خرج کند ولی با توجه به قوانین شکرستان به هیچ وجه نی نباید کاملاً داخل لیوان قرار گیرد. اندازه‌نی‌هایی که او می‌خرد چقدر است؟ (از قطر نی صرف نظر می‌کنیم، یعنی نی را یک پاره‌خط فرض می‌کنیم.)

- (۱) $2\sqrt{73}$ (۲) $2\sqrt{89}$ (۳) $8\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{87}$ (۵) $10\sqrt{3}$

۷. مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه ناتهی دارد که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن ۶ باشد؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶ (۵) ۱۰۲۴

۸. کشور شکرستان از سه استان نمکستان، فلفلستان و سماقستان تشکیل شده است که به ترتیب ۱۰، n و $2n$ شهر دارند. می‌دانیم تعداد شهروندان در شهرهای مختلف این کشور یک‌سان است و جمعیت کل کشور $n^2 + n + 1$ نفر است. عدد n در کدام یک از محدوده‌های زیر قرار دارد؟

- (۱) ۱ تا ۱۰ (۲) ۱۱ تا ۲۰ (۳) ۲۱ تا ۳۰ (۴) ۳۱ تا ۴۰ (۵) ۴۱ تا ۵۰

۹. $ABCD$ دوزنقه‌ای است که در آن $AB \parallel CD$ و $CD = 3AB$. نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع BC و CD هستند و مساحت دوزنقه ۳۲ است. مساحت مثلث AMN چه قدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵ (۵) ۱۶

۱۰. برای چند مقدار صحیح n دو چندجمله‌ای $x^3 + nx - 1$ و $x^3 + x - n^2$ ریشه حقیقی مشترک دارند؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱۱. حداکثر چند مثلث غیر هم‌نهشت وجود دارد که طول اضلاع آن‌ها از بین اعداد ۱، ۲، ۴، ۸ و ...، 2^{10} باشند؟ (طول اضلاع می‌توانند با هم برابر باشند).

- (۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰ (۵) ۱۶۵

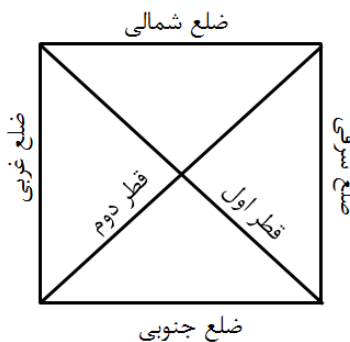
۱۲. برای عدد طبیعی n چندجمله‌ای $P_n(x)$ را برابر $(x+n)^2$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم $(P_1(x), \dots, P_{1392}(x), \dots, P_{1393}(x))$ یک چندجمله‌ای از درجه 2^{1393} است. ضریب $x^{2^{1393}-1}$ در این چندجمله‌ای برابر کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) 2^{1392} (۳) $2^{1392} + 1$ (۴) $2^{1393} - 1$ (۵) 2^{1393}

۱۳. فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $B = \{1, 2, \dots, 100\}$. تعداد توابع $f: A \rightarrow B$ را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی m و n که $2 \leq m, n \leq 10$ و $mn \leq 100$ رابطه $f(mn) = mf(n)$ برقرار باشد.

- (۱) 10^2 (۲) 10^3 (۳) 10^4 (۴) 10^5 (۵) 2×10^5

۱۴. پادشاه شکرستان که قصری به شکل مربع دارد، به تازگی کتیبه‌ای به خط نمکی مربوط به یکی از اجدادش پیدا کرده که ریاضی‌دان بوده است. پس از ترجمه کتیبه توسط زبان‌شناسان مشخص شد که در نقطه‌های مختلفی از شهر، گنج‌هایی وجود دارد. ترجمه کتیبه را در زیر می‌بینید.



گنج‌ها در نقطه‌هایی از شهر پنهان گشته‌اند که اگر هر کدام از آن‌ها را به ترتیب نسبت به ضلع شمالی، ضلع جنوبی، ضلع شرقی، ضلع غربی، قطر اول و در نهایت قطر دوم قصر قرینه کنیم به جای اول بازگردد.

چند گنج در شهر پنهان شده است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ (۵) ۸



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۱۵. مهندس شش دیواری قصد دارد نقشه‌ی خانه‌ای با شش دیوار را طراحی کند. او می‌خواهد سه تا از دیوارها در امتداد شمالی-جنوبی و با طول‌های ۲، ۴ و ۶ متر باشند و سه تا از دیوارها نیز در امتداد شرقی-غربی و با طول‌های ۴، ۶ و ۱۰ متر باشند. او چند نقشه‌ی مختلف با این ویژگی‌ها می‌تواند بکشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰ (۵) ۲۴

۱۶. می‌دانیم عددی طبیعی در مبنای دو، ۳۰ رقمی است. در مورد تعداد ارقام این عدد در مبنای سه چه می‌توان گفت؟

- (۱) حتماً ۱۸ رقمی است.
 (۲) حتماً ۱۹ رقمی است.
 (۳) حتماً ۲۰ رقمی است.
 (۴) برای بعضی اعداد ۱۸ رقمی و برای بعضی ۱۹ رقمی است.
 (۵) برای بعضی اعداد ۱۹ رقمی و برای بعضی ۲۰ رقمی است.

۱۷. عدد صحیح n را «نه چندان بزرگ» می‌گوییم هرگاه برای هر دو عدد مثبت x و y که $(x+1)(y+1) = 2$ داشته باشیم $xy + \frac{1}{xy} \geq n$. بزرگ‌ترین عدد نه چندان بزرگ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶ (۵) ۷

۱۸. رئوس یک پنج‌ضلعی محدب را به ترتیب ساعت‌گرد A, B, C, D, E می‌نامیم. می‌دانیم $\angle BAE = 2\angle DAC = 93^\circ$ و $\angle BCA = \angle CDA$ و $\angle EDA = \angle DCA$. اگر $AD = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2$ آن‌گاه مقدار $\frac{AE}{AB}$ برابر کدام گزینه است؟

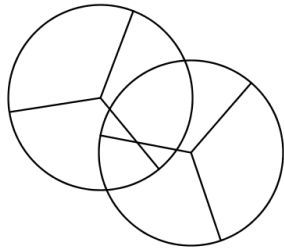
- (۱) $\frac{1}{3} \sin 93^\circ$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴) $3 \sin 93^\circ$ (۵) ۳

۱۹. x و y دو عدد حقیقی هستند که $\sin(x) + \cos(y) = 1$. بیش‌ترین مقدار $\sin(y) + \cos(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۵) ۲



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. دو صفحه پلاستیکی شفاف و رنگی به شکل دو دایره برابر داریم که هر کدام از آن‌ها توسط سه شعاع با زاویه‌های 120° ، به سه قسمت برابر تقسیم شده‌اند. قسمت‌ها دارای رنگ‌های متفاوت هستند. هرگاه دو رنگ روی هم قرار گیرند، رنگی جدید ایجاد می‌شود و رنگ‌های ترکیبی ایجاد شده نیز با یک‌دیگر متفاوت‌اند. مثلاً در شکل رو به رو 10° رنگ مختلف به وجود آمده است.

حداکثر تعداد رنگ‌های مختلفی که در یک وضعیت قرار گرفتن صفحه‌ها می‌تواند به وجود بیاید چند تاست؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵ (۵)

۲۱. یک زیرمجموعه ناتهی از اعداد طبیعی را «منظم» گوئیم اگر میانگین اعضای آن عددی طبیعی باشد و آن را «فوق منظم» گوئیم اگر همه زیرمجموعه‌های ناتهی آن منظم باشند. تعداد زیرمجموعه‌های فوق منظم پنج عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 67\}$ چند است؟

- ۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۹ (۴) ۴۷ (۵)

۲۲. شش نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها هم خط نیستند. در بین زوایایی که این نقاط تشکیل می‌دهند، حداکثر چند زاویه در بازه $(90^\circ, 180^\circ)$ وجود دارد؟

- ۶ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵)

۲۳. نقطه P روی کمان BC از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل A نیست) قرار دارد. می‌دانیم $AB = 2$ ، $AC = 3$ و $BC = 4$. نقاط M و N روی خط BC قرار دارند به طوری که B بین C و M است و C بین N و B است. می‌دانیم MA و PN بر دایره محیطی مثلث ABC مماس هستند و $MA = PN$. خط AP خط BC را در نقطه T قطع می‌کند. اندازه PT چقدر است؟

- $\frac{5}{3}$ (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{5\sqrt{13}}{7}$ (۳) $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ (۴) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ (۵)



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۴. عدد طبیعی M را خوب می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی نه لزوماً متمایز a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) یافت شوند به طوری که $M = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ و خواص زیر برقرار باشد.

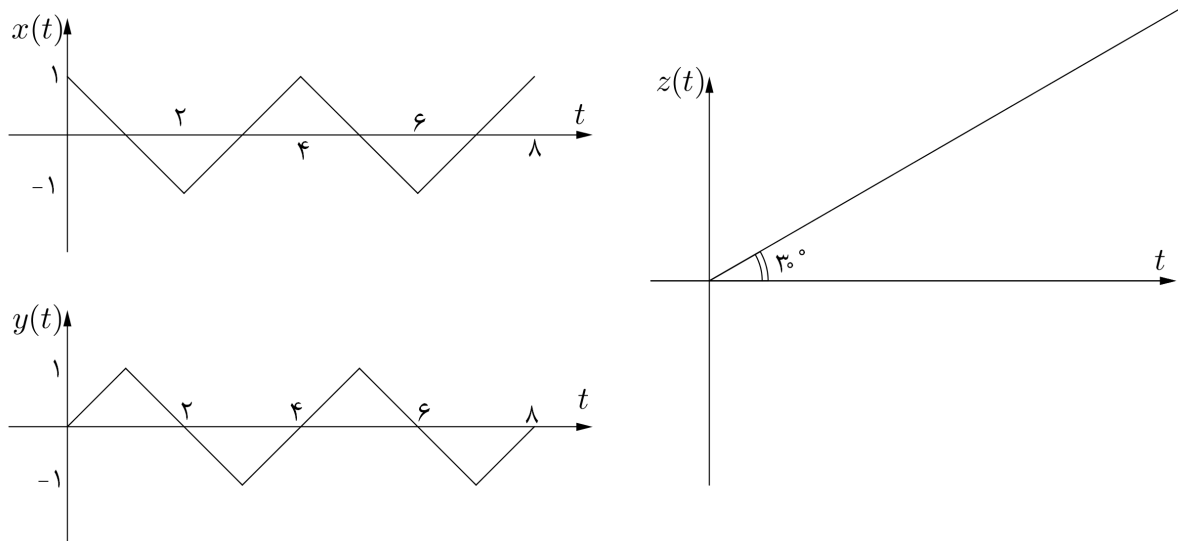
(آ) M بر توان سوم هیچ عدد طبیعی بزرگ‌تر از یکی بخش پذیر نیست.

(ب) اگر $1 \leq i \leq n$ آن گاه $a_{i-1} a_{i+1}$ بر a_i بخش پذیر است. ($a_{n+1} = a_1$ و $a_0 = a_n$)

چند عدد خوب کوچک‌تر از ۲۰۱۵ داریم؟

- ۷۲ (۵) ۴۴ (۴) ۲۹ (۳) ۲۶ (۲) ۲۲ (۱)

۲۵. متحرکی در فضا به گونه‌ای حرکت می‌کند که در لحظه t در نقطه $(x(t), y(t), z(t))$ قرار دارد. اگر نمودارهای $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر حسب t به شکل‌های زیر باشند، مسافتی که این متحرک از $t=0$ تا $t=8$ طی می‌کند برابر کدام گزینه است؟



- $16\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۵) $8\sqrt{\frac{7}{3}}$ (۴) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۳) $4\sqrt{\frac{7}{3}}$ (۲) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (۱)



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۶. «پشیزها» موجوداتی میکروسکوپی هستند که اندازه‌های مختلفی دارند. هرگاه دو پشیز با اندازه‌های x و y در مجاورت هم قرار بگیرند، می‌توانند با صرف انرژی‌ای برابر $|x - y|$ به هم بچسبند و یک پشیز با اندازه‌ی $x + y$ ایجاد کنند.

اگر ۱۰۲۵ پشیز با اندازه‌ی ۱ روی یک خط ردیف شده باشند، کم‌ترین انرژی‌ای که باید در مجموع صرف کنند تا تبدیل به یک پشیز با اندازه‌ی ۱۰۲۵ شوند، چه قدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۳۱ (۵) ۳۲

۲۷. $A_1 A_2 \dots A_9$ یک ۹ ضلعی منتظم است و نقطه‌های K ، M و N درون آن به گونه‌ای هستند که $A_1 A_2 A_4 K$ متوازی‌الاضلاع و $A_6 A_7 M$ و $A_8 A_9 N$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه $\angle MKN$ چه قدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵ (۵) ۶۰

۲۸. فرض کنید A مجموعه‌ی نقاط با مختصات صحیح در صفحه باشد و تابع $f: A \rightarrow \{0, 1, 2\}$ دارای این خاصیت است که برای هر x و y صحیح،

$$f(x, y) - f(x + 1, y) - f(x - 1, y) - f(x, y + 1) - f(x, y - 1)$$

بر ۳ بخش پذیر است. کدام گزاره صحیح است؟

(۱) f باید تابعی ثابت باشد.

(۲) مجموعه‌ای متناهی وجود ندارد که با دانستن f در آن مجموعه، تابع f به صورت یک‌تا تعیین شود.

(۳) اگر مجموعه‌ی نقاطی که f در آن‌ها مقدار ۱ را اتخاذ می‌کند، مشخص باشد (فرض کنید این مجموعه ناتهی است) تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.

(۴) اگر مقدار f را روی نقاطی که هر دو مؤلفه آن‌ها زوج است بدانیم، تابع f به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.

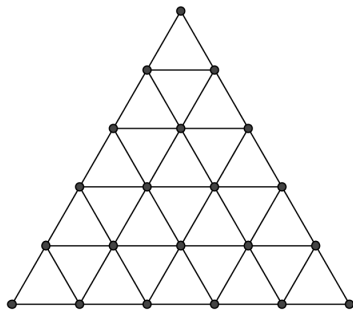
(۵) گزینه‌های ۲ و ۳



آزمون مرحله اول سی و سومین المپیاد ریاضی کشور

۲۹. مثلثی که طول هر سه ضلعش عددی در بازه $[1, 2]$ ، و اندازه همه زاویه‌هایش در بازه $[45, 90]$ درجه است، را «معتدل» می‌گوییم. اختلاف مساحت دو مثلث معتدل حداکثر چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{12-3\sqrt{2}}{8}$ (۵) هیچ کدام



۳۰. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۵ را به شکل روبه‌رو به مثلث‌هایی به ضلع یک تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از رئوس این شبکه‌بندی، برداری دل‌خواه به طول یک و موازی با یکی از اضلاع مثلث نسبت می‌دهیم. مجموع همه‌ی این بردارها چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۷۲۶ (۳) ۲۷۷۴ (۴) ۱۳۸۷ (۵) ۳۶۳