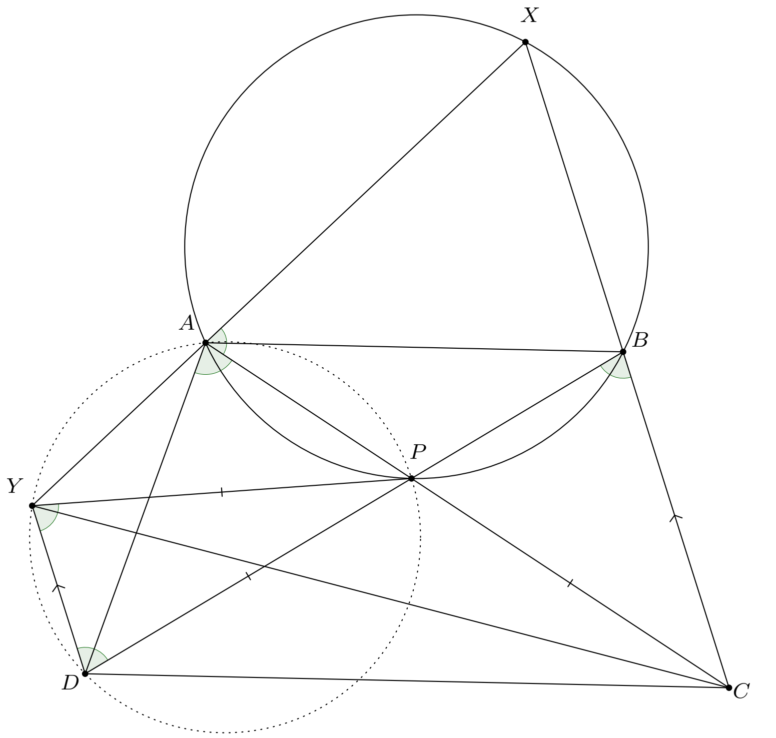
۱. در ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهاست و دایره محیطی مثلث APB، BC را در X قطع می‌کند. خط گذرا از D و موازی با BC، AX را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید

$$\angle YDA = ۲ \times \angle YCA$$

راه‌حل اول.

سوال را با این فرض اضافه حل می‌کنیم: نقاط C و Y در دو طرف خط ناشی از امتداد پاره‌خط AD است.



از آن‌جا که $YD \parallel BC$ به‌دست می‌آید $\angle YDP = \angle CBP = \angle XAP$ در نتیجه چهارضلعی $YAPD$ محاطی است هم‌چنین دقت کنید که $ABCD$ نیز محاطی است. حالا داریم

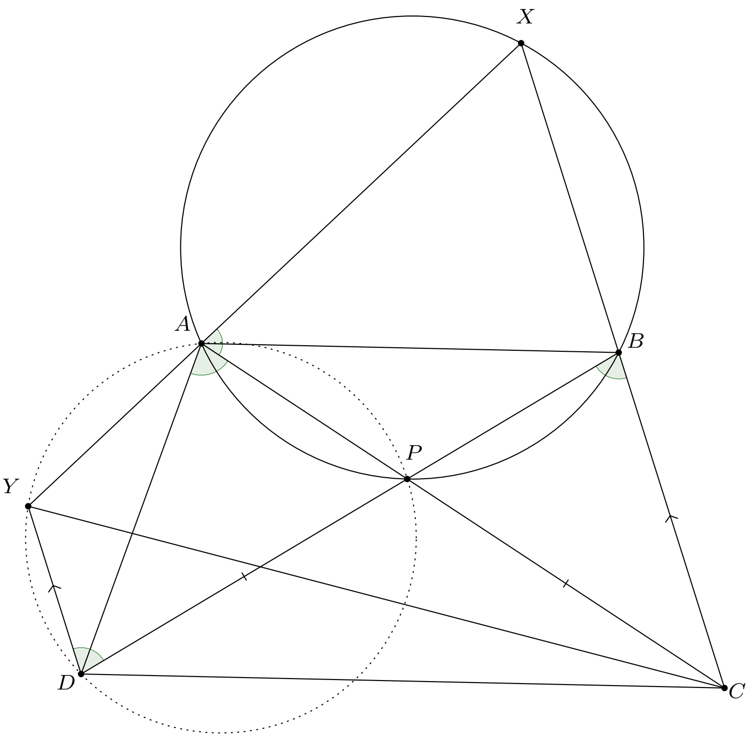
$$\angle DYP = \angle DAP = \angle DAC = \angle DBC = \angle PDY$$

پس $PY = PD$ از طرف دیگر نیز واضح است که $PD = PC$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $PY = PC$ و در نهایت به‌دست می‌آید

$$۲\angle YCA = ۲\angle YCP = \angle APY = \angle YDA$$

پس حکم ثابت شد.

راه‌حل دوم.



مشابه راه‌حل اول ثابت می‌شود $YAPD$ محاطی است. داریم

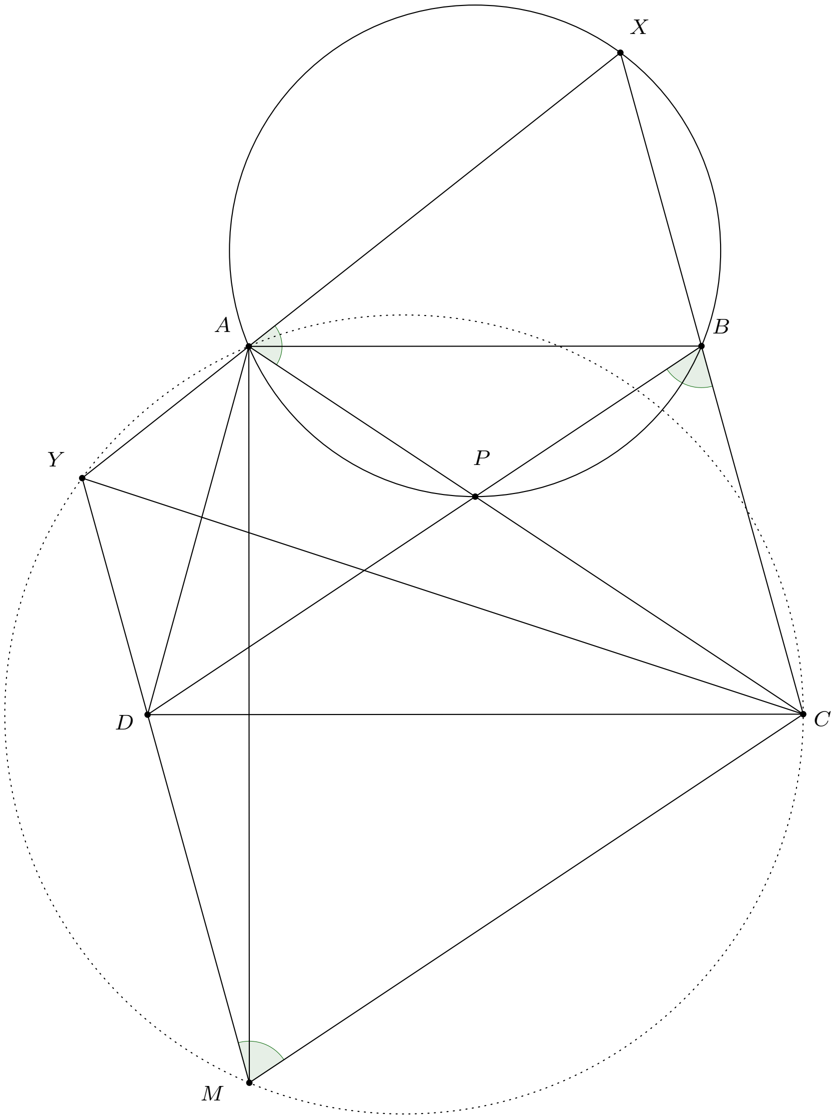
$$\angle DAC = \angle DBC = \angle YDP = \angle XAP = \angle XAC$$

پس C روی نیم‌ساز خارجی $\angle YAD$ قرار دارد. حالا از آن‌جا که $PC = PD$ به‌دست می‌آید

$$\angle ACD = \angle PCD = \frac{۱}{۲}\angle APD = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle AYD$$

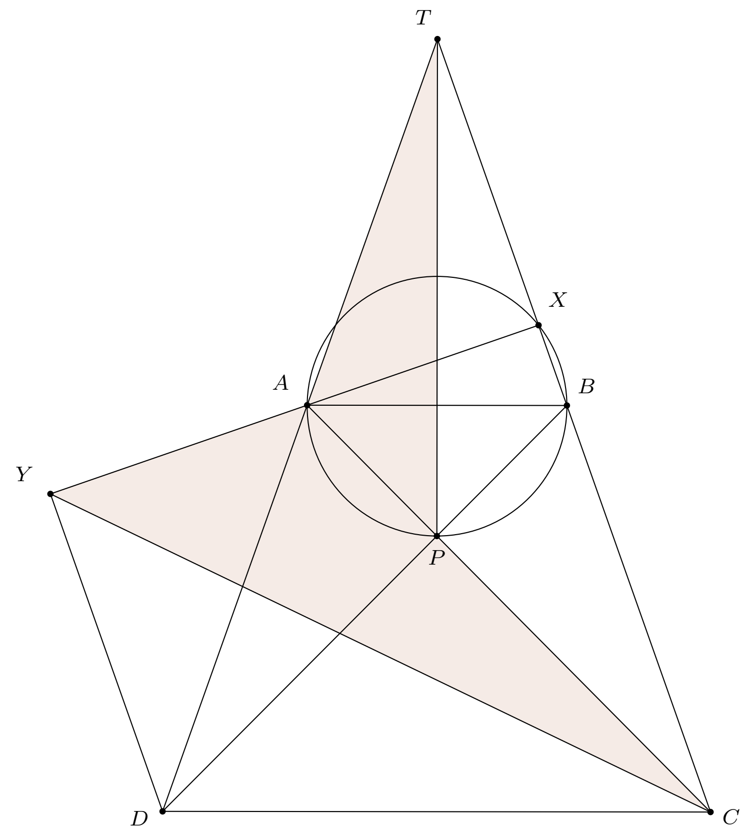
پس C دو تا از خواص مرکز دایره محاطی خارجی نظیر راس Y در مثلث DYA را دارد که نتیجه می‌دهد بر آن نقطه منطبق است. در نهایت بنابر خواص مرکز دایره‌محاطی خارجی داریم $۲\angle YCA = \angle YDA$ که همان حکم سوال است.

راه‌حل سوم.



نقطه M را روی امتداد YD و از طرف D به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = MD$. واضح است که $\angle YDA = ۲\angle DMA$ پس برای اثبات حکم کافیست نشان دهیم چهارضلعی $AYMC$ محاطی است. دقت کنید که $MD = AD = BC$ و $MD \parallel BC$ پس چهارضلعی $MCBD$ یک متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه $\angle DMC = \angle DBC = \angle XAP$ که محاطی بودن چهارضلعی $AYMC$ را نتیجه می‌دهد.

راه‌حل چهارم.



نقطه تقاطع AD و BC را T می‌نامیم. از تشابه دو مثلث CBP و CAX به‌دست می‌آید

$$\frac{BP}{AX} = \frac{CB}{CA} = \frac{AD}{CA} \Longrightarrow AX \cdot AD = CA \cdot BP \qquad (۱)$$

از طرف دیگر طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{AY}{AX} = \frac{AD}{AT} \Longrightarrow AX \cdot AD = AT \cdot AY \qquad (۲)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$AT \cdot AY = CA \cdot BP = CA \cdot AP \Longrightarrow \frac{AT}{CA} = \frac{AP}{AY} \qquad (۳)$$

در راه‌حل اول ثابت کردیم $\angle XAP = \angle DAC$ پس $\angle YAC = \angle TAP$ و بنابر رابطه (۳) نتیجه می‌شود $\triangle YAC \sim \triangle PAT$. در نهایت داریم

$$\angle YCA = \angle ATP = \frac{۱}{۲}\angle ATX = \frac{۱}{۲}\angle YDA$$

۲. فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{۲}$ عدد مثبت به‌دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

راه‌حل اول.

فرض کنید اعداد داده شده $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$ باشند که n عددی فرد است. اختلاف $a_i - a_j$ که $i > j$ را اگر i و j زوجیت یکسانی داشته باشند در دسته اول و اگر i و j زوجیت متمایزی داشته باشند در دسته دوم قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول و مجموع اعداد دسته دوم با هم برابر است. فرض کنید i زوج باشد (حالت دیگر مشابه است). اختلاف‌های $a_{n-۱} - a_i, a_{n-۳} - a_i, \cdots, a_{i+۲} - a_i$ و $a_i - a_{i-۲}, a_i - a_{i-۴}, \cdots, a_i - a_۲$ در دسته اول شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته اول برابر است با

$$\frac{i-۲}{۲} - \frac{n-i-۱}{۲} = \frac{۲i-n-۱}{۲}$$

به طور مشابه اختلاف‌های $a_n - a_i, a_{n-۲} - a_i, \cdots, a_{i+۱} - a_i$ و $a_i - a_{i-۱}, a_i - a_{i-۳}, \cdots, a_i - a_۱$ در دسته دوم شامل a_i هستند پس ضریب a_i در مجموع اعداد دسته دوم برابر است با

$$\frac{i}{۲} - \frac{n-i+۱}{۲} = \frac{۲i-n-۱}{۲}$$

پس ضریب a_i در مجموع اعداد هر دسته برابر است و حکم ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم.
با استقرا روی n حکم را نشان می‌دهیم. برای پایه استقرا ($n=3$) درستی حکم به‌راحتی قابل بررسی است پس فرض می‌کنیم حکم برای n درست باشد و درستی آن را برای $n+2$ نشان می‌دهیم. فرض کنید اعداد داده شده $x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}$ باشند. طبق فرض استقرا تفاضل‌های دوبه‌دوی اعداد $x_1,x_2,\dots,x_n$ را می‌توانیم به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کنیم پس فقط کافیست حکم را برای تفاضل‌های باقی‌مانده نشان دهیم. تفاضل‌های

$$\begin{cases} x_{n+2}-x_{n+1}, x_{n+2}-x_n, \dots, x_{n+2}-x_{\frac{n+3}{2}} \\ x_{n+1}-x_1, x_{n+1}-x_2, \dots, x_{n+1}-x_{\frac{n+1}{2}} \end{cases}$$

را در دسته اول و تفاضل‌های

$$\begin{cases} x_{n+2}-x_1, x_{n+2}-x_2, \dots, x_{n+2}-x_{\frac{n+1}{2}} \\ x_{n+1}-x_n, x_{n+1}-x_{n-1}, \dots, x_{n+1}-x_{\frac{n+3}{2}} \end{cases}$$

را در دسته دوم قرار می‌دهیم. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که مجموع اعداد در هر دسته با هم برابر است پس حکم ثابت شد.

راه‌حل سوم.
فرض کنید اعداد داده شده $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ باشند که n عددی فرد است. هر مثال افراز کردن اعداد $|a_i - a_j|$ها را با ماتریسی $n \times n$ مدل می‌کنیم. فرض کنید اعداد $|a_i - a_j|$ها را به دو مجموعه A و B افراز کرده‌ایم. ماتریسی $n \times n$ در نظر بگیرید. اگر $a_i - a_j \in A$ که $i < j$ آن‌گاه در سطر iام و ستون jام A می‌نویسیم و در غیر این‌صورت B می‌نویسیم. حالا برای این‌که حکم مسئله برقرار باشد برای هر i باید داشته باشیم

(تعداد Bها در ستون i) $-$ (تعداد Bها در سطر i) $=$ (تعداد Aها در ستون i) $-$ (تعداد Aها در سطر i)

یک ماتریس با این خاصیت می‌سازیم. در هر سطر $\frac{n-1}{2}$ خانه سمت چپ را A می‌گذاریم و بقیه را B (اگر کمتر از $\frac{n-1}{2}$ خانه وجود داشت همه خانه‌های آن سطر را A می‌گذاریم). مثال برای $n = 7$:

$$\begin{bmatrix} \times & A & A & A & B & B & B \\ \times & \times & A & A & A & B & B \\ \times & \times & \times & A & A & A & B \\ \times & \times & \times & \times & A & A & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & A & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & A \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که ماتریس‌هایی که به این شکل ساخته می‌شوند خاصیت بیان شده را دارا هستند.

نکته. با این روش می‌توان افرازهای مطلوب بسیاری ساخت که ما تنها یکی از آن‌ها را بیان کردیم.

۳. فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند و دو دنباله اکیداً صعودی $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1}+k)(a^{r_2}+k)\dots(a^{r_n}+k) = (a^{s_1}+k)(a^{s_2}+k)\dots(a^{s_n}+k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

راه‌حل اول.

با استقرا روی n حکم را نشان می‌دهیم. برای پایه استقرا ($n=1$) که حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم برای $n-1$ درست باشد و درستی آن را برای n نشان می‌دهیم. بزرگترین توان عدد اول p در عدد طبیعی x را با $v_p(x)$ نشان می‌دهیم. بنابر فرض $a > k$ عددی اول مانند p وجود دارد که $v_p(a) > v_p(k)$. دو تا از خواص تابع v_p که اثبات آن‌ها نیز واضح است به شرح زیر است:

- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند که $v_p(x) < v_p(y)$ آن‌گاه $v_p(x+y) = v_p(x)$.

دو طرف تساوی فرض مسئله را باز می‌کنیم، یک k^n از دو طرف خط می‌زنیم و با استفاده از این دو خاصیت v_p دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم. طرف چپ تساوی برابر است با

$$a^{r_1+\cdots+r_n} + k\left(a^{r_1+\cdots+r_{n-1}} + \cdots + a^{r_2+\cdots+r_n}\right) + \cdots + k^{n-1}\left(a^{r_1} + \cdots + a^{r_n}\right)$$

دقت کنید که عبارت بالا به صورت مجموع n عبارت نوشته شده است پس طبق خاصیت دوم باید کم‌ترین توان p بین این n عبارت را پیدا کنیم. طبق خواص بیان شده و اکیداً صعودی بودن دنباله r_iها داریم

$$\begin{aligned}
v_p\left(k^{n-i}\left(a^{r_1+\cdots+r_i} + \cdots + a^{r_{n-i+1}+\cdots+r_n}\right)\right) &= v_p\left(k^{n-i}\right) + v_p\left(a^{r_1+\cdots+r_i} + \cdots + a^{r_{n-i+1}+\cdots+r_n}\right) \\
&= (n-i)v_p(k) + v_p\left(a^{r_1+\cdots+r_i}\right) \\
&= (n-i)v_p(k) + (r_1+\cdots+r_i)\,v_p(a) \\
&> (n-i)v_p(k) + ir_1v_p(a) \\
&> (n-1)v_p(k) + r_1v_p(a)
\end{aligned}$$

واضح است که رابطه آخر همان $v_p\left(k^{n-1}\left(a^{r_1}+\cdots+a^{r_n}\right)\right)$ است پس طبق خاصیت دوم بزرگ‌ترین توان p سمت چپ برابر است با $(n-1)v_p(k) + r_1v_p(a)$ و به طور مشابه بزرگ‌ترین توان p سمت راست برابر است با $(n-1)v_p(k) + s_1v_p(a)$. در نتیجه این دو عبارت باید با هم برابر باشند که به‌دست می‌آید $r_1 = s_1$. در نهایت با خط زدن عبارت‌های $a^{r_1}+k$ و $a^{s_1}+k$ از دو طرف تساوی حکم طبق فرض استقرا به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم.
مشابه راه‌حل اول فقط کافیست نشان دهیم $r_1 = s_1$ پس بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $s_1 \geq r_1 + 1$. تعریف می‌کنیم $d = (a, k)$، $a = da_1$ و $k = dk_1$. با استفاده از این روابط تساوی مسئله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\prod_{i=1}^{n} (d^{r_i} a_1^{r_i} + dk_1) = \prod_{i=1}^{n} (d^{s_i} a_1^{s_i} + dk_1) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \left(d^{r_i-1} a_1^{r_i} + k_1\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(d^{s_i-1} a_1^{s_i} + k_1\right)$$

حالا دو طرف تساوی آخر را به پیمانه $d^{r_1} a_1^{r_1+1}$ در نظر می‌گیریم که بنابر اکیداً صعودی بودن دو دنباله به‌دست می‌آید

$$\left(d^{r_1-1} a_1^{r_1} + k_1\right) k_1^{n-1} \equiv k_1^n \pmod{d^{r_1} a_1^{r_1+1}} \Longrightarrow d^{r_1} a_1^{r_1+1} \mid d^{r_1-1} a_1^{r_1} k_1^{n-1} \Longrightarrow da_1 \mid k_1^{n-1}$$

پس $a_1 \mid k_1^{n-1}$ اما دقت کنید که $(a_1, k_1) = 1$ پس $a_1 = 1$ که نتیجه می‌دهد $a \mid k$ و این با رابطه $a > k$ در تناقض است.

۴. همه توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3 \tag{1}$$

راه‌حل اول.

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم $x=y=0$ و به‌دست می‌آید $f(0)=0$. تعریف می‌کنیم $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ برای هر $x\neq 0$ پس رابطه (۱) تبدیل می‌شود به

$$g(x+y)g(x^2-xy+y^2)=1 \tag{2}$$

برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ که $x+y\neq 0$ (دقت کنید که x^2-xy+y^2 هیچ‌گاه صفر نمی‌شود). نشان می‌دهیم برای هر a,bای که $b\geq\frac{a^2}{4}$ اعداد حقیقی x,y وجود دارند به‌طوری‌که $x+y=a$ و $x^2-xy+y^2=b$. داریم

$$b=x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=a^2-3xy\Rightarrow xy=\frac{a^2-b}{3}$$

پس x,y ریشه‌های معادله $z^2-az+\frac{a^2-b}{3}=0$ هستند که طبق فرض $b\geq\frac{a^2}{4}$ دلتای آن نامنفی است که وجود داشتن x,y را نتیجه می‌دهد. پس رابطه (۲) را می‌توان به شکل

$$g(a)g(b)=1 \tag{3}$$

نوشت که $a\neq 0$ و $b\geq\frac{a^2}{4}$. فرض کنید $0<a\leq 4$ واضح است که $a\geq\frac{a^2}{4}$ پس در رابطه (۳) می‌توانیم قرار دهیم $b=a$ که نتیجه می‌دهد $g(a)=\pm 1$. باز هم در رابطه (۳) قرار می‌دهیم $a=4$ پس برای هر $b\geq 4$ داریم $g(b)=\pm 1$ در نتیجه در کل برای هر $a>0$ داریم $g(a)=\pm 1$. در رابطه (۳) a را عددی دلخواه قرار می‌دهیم و از آن‌جا که b مثبت است نتیجه می‌شود $g(a)=\pm 1$ برای هر $a\neq 0$. حالا فرض کنید r,s حقیقی وجود داشته‌باشند که $g(r)=1$ و $g(s)=-1$. طبق رابطه (۳) برای هر $b\geq\frac{r^2}{4}$ داریم $g(b)=1$ و از طرف دیگر برای هر $b\geq\frac{s^2}{4}$ داریم $g(b)=-1$ که به وضوح این دو رابطه با هم در تناقض‌اند پس g ثابت ۱ یا ثابت -1 است که نتیجه می‌دهد $f(x)=x$ یا $f(x)=-x$ که هر دوی این توابع در رابطه (۱) صدق می‌کنند.

راه‌حل دوم.
تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. ابتدا دقت کنید که اگر عدد حقیقی a وجود داشته باشد که $f(a)=۰$، $P(a,۰)$ نتیجه می‌دهد $a=۰$. حالا داریم

$$P(x,x-y)\longrightarrow f(۲x-y)f(x^۲-xy+y^۲)=(۲x-y)(x^۲-xy+y^۲)$$

با تقسیم کردن این رابطه بر $P(x,y)$ به‌دست می‌آید (فرض می‌کنیم $x+y\neq ۰$)

$$\frac{f(۲x-y)}{f(x+y)}=\frac{۲x-y}{x+y} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم $y=۱-x$ که نتیجه می‌دهد $f(۳x-۱)=(۳x-۱)f(۱)$ و از آن‌جا که $۳x-۱$ همه مقادیر حقیقی را در بر می‌گیرد به‌دست می‌آید $f(x)=xf(۱)$. با قرار دادن این رابطه در صورت مسئله نتیجه می‌شود $f(۱)=\pm ۱$ پس توابع $f(x)=x$ و $f(x)=-x$ جواب‌های مسئله‌اند.

راه‌حل سوم.

تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$\left.\begin{array}{r} P(x,0) \longrightarrow f(x)f\left(x^{2}\right)=x^{3} \\ P(x,x) \longrightarrow f(2x)f\left(x^{2}\right)=2x^{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(2x)=2f(x) \qquad (1)$$

هم‌چنین دقت کنید که $P(1,0)$ نتیجه می‌دهد $f(1)=\pm 1$. فرض می‌کنیم $f(1)=1$. تعریف می‌کنیم $z=x+y$ و $a=xy$ و بنابر این تعریف به‌دست می‌آید $x^{2}-xy+y^{2}=z^{2}-3a$ حالا می‌خواهیم همه zهایی را بیابیم که برای آن عدد حقیقی a وجود داشته باشد که $z^{2}-3a=1$. پس باید داشته باشیم

$$1=z^{2}-3a=z^{2}-3xy=z^{2}-3x(z-x)=3x^{2}-3zx+z^{2} \Longleftrightarrow 3x^{2}-3zx+\left(z^{2}-1\right)=0$$

برای اینکه تساوی آخر در اعداد حقیقی برای x جواب داشته باشد باید دلتای آن نامنفی باشد یعنی

$$0 \leq \Delta=9z^{2}-12\left(z^{2}-1\right)=12-3z^{2} \Longleftrightarrow -2 \leq z \leq 2$$

از آن‌جا که روابط بالا برگشت پذیر هستند نتیجه می‌شود اگر $-2 \leq z \leq 2$ اعداد حقیقی a، x_0 و y_0 وجود دارند که $z=x_0+y_0$، $a=x_0y_0$ و $z^{2}-3a=1$ پس از $P(x_0,y_0)$ به‌دست می‌آید $f(z)=z$ برای هر $-2 \leq z \leq 2$. حالا از رابطه (1) و به طور استقرایی نتیجه می‌شود $f\left(2^{n}x\right)=2^{n}f(x)$ برای هر n طبیعی. عدد حقیقی دلخواه x را در نظر می‌گیریم. واضح است که عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $|x| \leq 2^{n+1}$ پس $-2 \leq \frac{x}{2^{n}} \leq 2$ و در نهایت داریم

$$f(x)=2^{n}f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)=x$$

حالت $f(1)=-1$ نیز به طور کاملا مشابه جواب $f(x)=-x$ را می‌دهد پس همه جواب‌های سوال به‌دست آمدند.

راه‌حل چهارم.

تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. مشابه راه‌حل اول داریم $f(0)=0$ و مشابه راه‌حل سوم می‌توان ثابت کرد $f(2^n x)=2^n f(x)$ برای هر n طبیعی و $f(1)=\pm 1$ که فرض می‌کنیم $f(1)=1$. داریم

$$P(x,1-x)\longrightarrow f\left(3x^2-3x+1\right)=3x^2-3x+1$$

دقت کنید که عبارت $3x^2-3x+1$ همه اعداد بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{4}$ را می‌پوشاند پس برای هر $x\geq\frac{1}{4}$ داریم $f(x)=x$. عدد مثبت و دل‌خواه x را در نظر می‌گیریم. واضح است که عدد طبیعی n وجود دارد که $2^n x\geq\frac{1}{4}$ و از این به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{f\left(2^n x\right)}{2^n}=x$$

پس برای هر عدد نامنفی داریم $f(x)=x$. از طرف دیگر با مقایسه دو تساوی $P(x,0)$ و $P(-x,0)$ نتیجه می‌شود f تابعی فرد است (دقت کنید که مانند راه‌حل دوم می‌دانیم $f(a)=0$ اگر و تنها اگر $a=0$) پس برای هر x حقیقی داریم $f(x)=x$. حالت $f(1)=-1$ نیز جواب $f(x)=-x$ را می‌دهد.

راه‌حل پنجم.
تساوی داده شده مسئله را با $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. مشابه راه‌حل اول داریم $f(0)=0$. فرض می‌کنیم $x_0 \neq 0$ای وجود داشته باشد که $|f(x_0)| > |x_0|$. دقت کنید که

$$P(x_0, 0) \longrightarrow f(x_0)f\left(x_0^2\right) = x_0^3 \Longrightarrow \left|f\left(x_0^2\right)\right| < x_0^2$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $\left|f\left(x_0^4\right)\right| > \left|x_0^4\right|$. دقت کنید که مشابه راه‌حل سوم برای هر n طبیعی داریم $f\left(2^n x\right) = 2^n f(x)$ پس $\left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right| > \left|\frac{x_0}{2^n}\right|$. مشابه راه‌حل اول α و β حقیقی وجود دارند به‌طوری‌که

$$\alpha + \beta = \frac{x_0}{2^n}, \quad \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = x_0^4$$

اگر و تنها اگر $4x_0^4 > \left(\frac{x_0}{2^n}\right)^2$ که اگر n را عددی به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم برقرار می‌شود. حالا از $P(\alpha,\beta)$ به‌دست می‌آید

$$\left|\frac{x_0}{2^n}\right| \cdot \left|x_0^4\right| = \left|f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right| \cdot \left|f\left(x_0^4\right)\right| > \left|\frac{x_0}{2^n}\right| \cdot \left|x_0^4\right|$$

که تناقض است. حالت $|f(x_0)| < |x_0|$ نیز به‌طور مشابه رد می‌شود پس برای هر x داریم $f(x) = \pm x$ و مشابه راه‌حل اول ثابت می‌شود تنها جواب‌های مسئله توابع $f(x)=x$ و $f(x)=-x$ هستند.

۵. لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست‌کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

راه‌حل اول.

کلیدها را با شماره‌های $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ نشان می‌دهیم. لامپی که بیش‌ترین تعداد کلید به آن متصل است را A می‌نامیم. مسئله را به پنج حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت اول. ۵ کلید به لامپ A متصل باشد.

یک لامپ دیگر مانند B را درنظر می‌گیریم. اگر حداقل سه کلید به B وصل باشند همین سه کلید را می‌زنیم. در غیر این‌صورت ۲ کلید از کلیدهایی که B وصل نیستند و ۱ کلید که B وصل است را می‌زنیم.

حالت دوم. ۴ کلید به لامپ A متصل باشد.

از آن‌جا که مجموعه لامپ‌های هیچ دو کلیدی یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که کلیدهایش با کلیدهای A اشتراک داشته باشد. اگر حداقل ۳ اشتراک داشته باشد همین ۳ کلید را می‌زنیم. در غیر این‌صورت ۱ کلید مشترک بین A و B و ۲ کلید از ۴ کلیدی که به A وصل‌اند ولی به B وصل نیستند را می‌زنیم.

حالت سوم. ۳ کلید به لامپ A متصل باشد.

فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ متصل نباشد. از آن‌جا که مجموعه لامپ‌های این دو کلید یکسان نیست لامپی مانند B وجود دارد که فقط به یکی از این دو کلید متصل است. هم‌چنین این لامپ به حداکثر ۳ کلید متصل است پس به حداقل یکی از کلیدهای ۳ و ۴ و ۵ مانند ۳ وصل نیست در نتیجه کلیدهای ۱ و ۲ و ۳ را می‌زنیم.

حالت چهارم. ۲ کلید به لامپ A متصل باشد.

کاملا مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم. فرض کنید A به کلیدهای ۱ و ۲ و ۳ متصل نباشد پس لامپی مانند B وجود دارد که به کلید ۱ وصل باشد ولی به کلید ۲ وصل نباشد. هم‌چنین B حداقل به یکی از کلیدهای ۴ و ۵ مانند ۴ نیز وصل نیست پس کلیدهای ۱ و ۲ و ۴ را می‌زنیم.

حالت پنجم. ۱ کلید به لامپ A متصل باشد.

واضح است که همه لامپ‌ها به دقیقا ۱ کلید متصل‌اند و لامپی مانند B وجود دارد که به کلیدی دیگر وصل باشد پس ۲ کلید متصل به A و B و ۱ کلید دل‌خواه دیگر را می‌زنیم.

پس در همه حالات ممکن حکم مسئله برقرار است.

راه‌حل دوم.
لامپ‌ها را $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و کلیدها را $b_1, b_2, \ldots, b_5$ می‌نامیم. دقت کنید که $n \geq 3$ زیرا در غیر این‌صورت حداکثر ۴ زیرمجموعه از لامپ‌ها داریم و شرط سوال نمی‌تواند برقرار باشد. جدولی $10 \times n$ تشکیل می‌دهیم که هر سطر آن متناظر با یک سه‌تایی از کلیدها و هر ستون آن متناظر با یکی از لامپ‌ها است.

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	
(b_1, b_2, b_3)			$\cdots$		$\longrightarrow z_1$
(b_1, b_2, b_4)			$\cdots$		$\longrightarrow z_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
(b_3, b_4, b_5)			$\cdots$		$\longrightarrow z_{10}$

در خانه تقاطع سطر iام و ستون jام عدد ۱ را می‌نویسیم اگر پس از تغییر وضعیت ۳ کلید متناظر با سطر iام لامپ a_j روشن شود (فرض می‌کنیم همه لامپ‌ها خاموش بوده‌اند) و در غیر این‌صورت در این خانه عدد صفر را می‌نویسیم. مجموع اعداد سطر iام را با z_i نشان می‌دهیم. فرض کنید لامپ a_j به X_j کلید متصل باشد. در این‌صورت مجموع اعداد ستون jام برابر است با $\binom{X_j}{3} + \binom{X_j}{1}\binom{5-X_j}{2}$ پس باید داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{10} z_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{X_j}{3} + \binom{X_j}{1}\binom{5-X_j}{2} \right) \qquad (1)$$

حالا دقت کنید که X_j عددی طبیعی از ۱ تا ۵ است و با بررسی این مقادیر می‌توان به‌راحتی نتیجه گرفت که عبارت $\binom{X_j}{3} + \binom{X_j}{1}\binom{5-X_j}{2}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است. پس طبق رابطه (۱) داریم

$$\sum_{i=1}^{10} z_i \geq 4n$$

در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری iای وجود دارد که $z_i \geq \lceil \frac{4n}{10} \rceil \geq 2$ و این همان حکم سوال است.

راه‌حل سوم.
مجموعه لامپ‌های متصل به هر کلید را با $A_۱, A_۲, \dots, A_۵$ نشان می‌دهیم. می‌توانیم فرض کنیم برای هر $۱ \leq i < j < k \leq ۵$ داریم

$$|A_i \cup A_j \cup A_k| - (|A_i \cap A_j| + |A_j \cap A_k| + |A_k \cap A_i|) + ۳|A_i \cap A_j \cap A_k| \leq ۱ \qquad (۱)$$

زیرا دقت کنید که اگر لامپی در یک یا سه تا از مجموعه‌های A_i, A_j, A_k آمده باشد در سمت چپ رابطه (۱) یک بار شمرده می‌شود و در غیر این‌صورت شمرده نمی‌شود پس اگر این عبارت بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد حکم به‌دست می‌آید. حالا همه $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ رابطه ممکن را با هم جمع می‌کنیم و به رابطه زیر می‌رسیم

$$\sum_{۱\leq i<j<k\leq ۵} |A_i \cup A_j \cup A_k| - ۳ \sum_{۱\leq i<j\leq ۵} |A_i \cap A_j| + ۳ \sum_{۱\leq i<j<k\leq ۵} |A_i \cap A_j \cap A_k| \leq ۱۰ \quad (۲)$$

هم‌چنین طبق اصل شمول و عدم و شمول می‌دانیم

$$|A_i \cup A_j \cup A_k| = |A_i| + |A_j| + |A_k| - (|A_i \cap A_j| + |A_j \cap A_k| + |A_k \cap A_i|) + |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

و با قرار دادن این تساوی در رابطه (۲) به‌دست می‌آید

$$۶ \sum_{۱\leq i\leq ۵} |A_i| - ۶ \sum_{۱\leq i<j\leq ۵} |A_i \cap A_j| + ۴ \sum_{۱\leq i<j<k\leq ۵} |A_i \cap A_j \cap A_k| \leq ۱۰ \qquad (۳)$$

برای هر $۱ \leq n \leq ۵$، تعداد لامپ‌هایی که به دقیقا n کلید متصل‌اند را a_n می‌نامیم. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$\sum_{۱\leq i\leq ۵} |A_i| = \binom{۱}{۱}a_۱ + \binom{۲}{۱}a_۲ + \binom{۳}{۱}a_۳ + \binom{۴}{۱}a_۴ + \binom{۵}{۱}a_۵$$

$$\sum_{۱\leq i<j\leq ۵} |A_i \cap A_j| = \binom{۲}{۲}a_۲ + \binom{۳}{۲}a_۳ + \binom{۴}{۲}a_۴ + \binom{۵}{۲}a_۵$$

$$\sum_{۱\leq i<j<k\leq ۵} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{۳}{۳}a_۳ + \binom{۴}{۳}a_۴ + \binom{۵}{۳}a_۵$$

با قرار دادن این سه تساوی در رابطه (۳) و ساده کردن آن به‌دست می‌آید

$$۶a_۱ + ۶a_۲ + ۴a_۳ + ۴a_۴ + ۱۰a_۵ \leq ۱۰ \Longrightarrow a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ \leq \frac{۱۰}{۴} \qquad (۴)$$

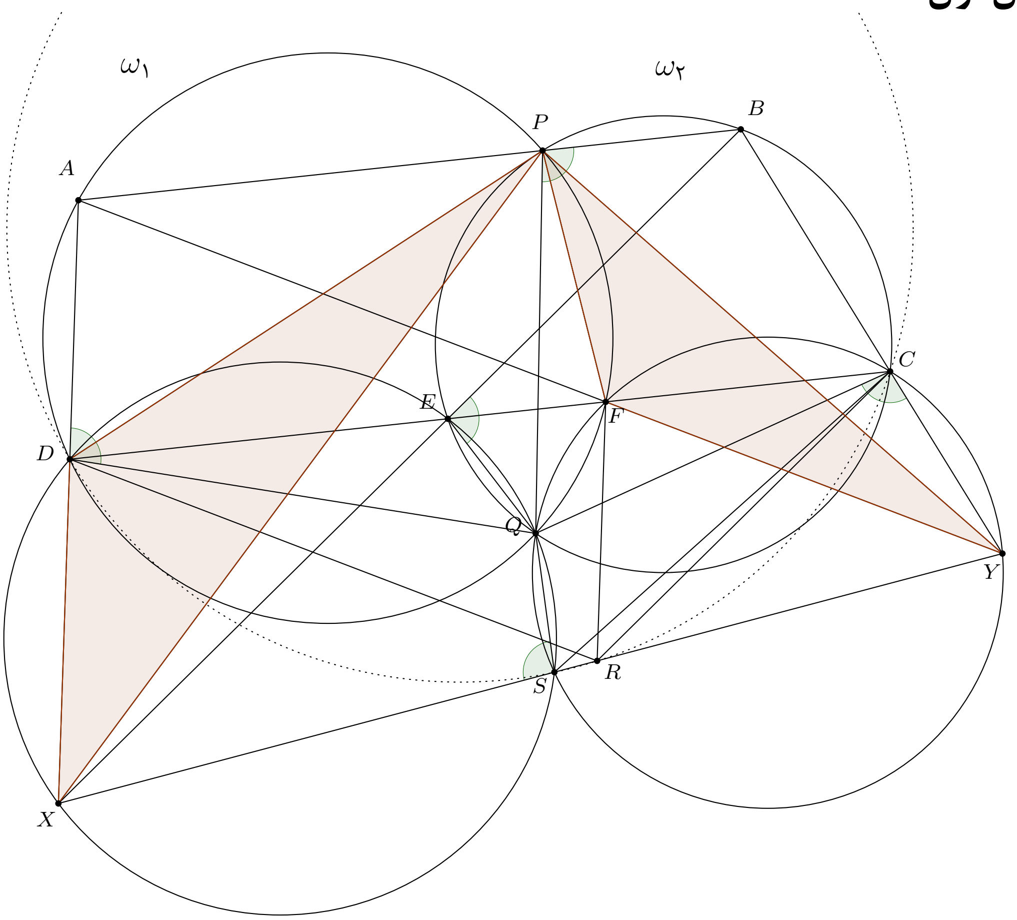
دقت کنید که مشابه راه‌حل دوم می‌دانیم اجتماع A_iها حداقل ۳ عضو دارد و از طرف دیگر تعداد اعضای اجتماع A_iها برابر است با $a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵$ که این با رابطه (۴) در تناقض است پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود.

۶. دو دایره ω_1 و ω_2 یک‌دیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دل‌خواه که از P می‌گذرد و ω_1 و ω_2 را به‌ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا ω_1 را در D و F و ω_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیم‌ساز زاویه $\angle XPY$ است.

راه‌حل اول.



الف) دقت کنید که

$$\angle QEB = \angle QPB = \angle QDA \Longrightarrow \angle QEX = \angle QDX$$

پس چهارضلعی $XDEQ$ محاطی است و به طور مشابه چهارضلعی $YCFQ$ نیز محاطی است. محل برخورد دوم دایره محیطی این دو چهارضلعی را S می‌نامیم. واضح است که $\angle QSX = \angle QEB = \angle QCY$ پس X, S, Y هم‌خطاند. محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث DSC با XY را R' می‌نامیم. داریم

$$\angle R'DC = \angle R'SC = \angle YSC = \angle YFC = \angle FAP = \angle FDP = \angle CDP$$

و به طور مشابه به‌دست می‌آید $\angle R'CD = \angle DCP$ پس R' قرینه P نسبت به CD است و $R \equiv R'$

درنتیجه حکم این قسمت ثابت شد.

ب) واضح است که $FR = FP = AD$ و $RD = PD = AF$ پس $AFRD$ متوازی‌الاضلاع است و $AF \parallel RD$ و $AD \parallel RF$. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{RY}{RX} = \frac{AD}{DX} = \frac{PF}{DX}$$

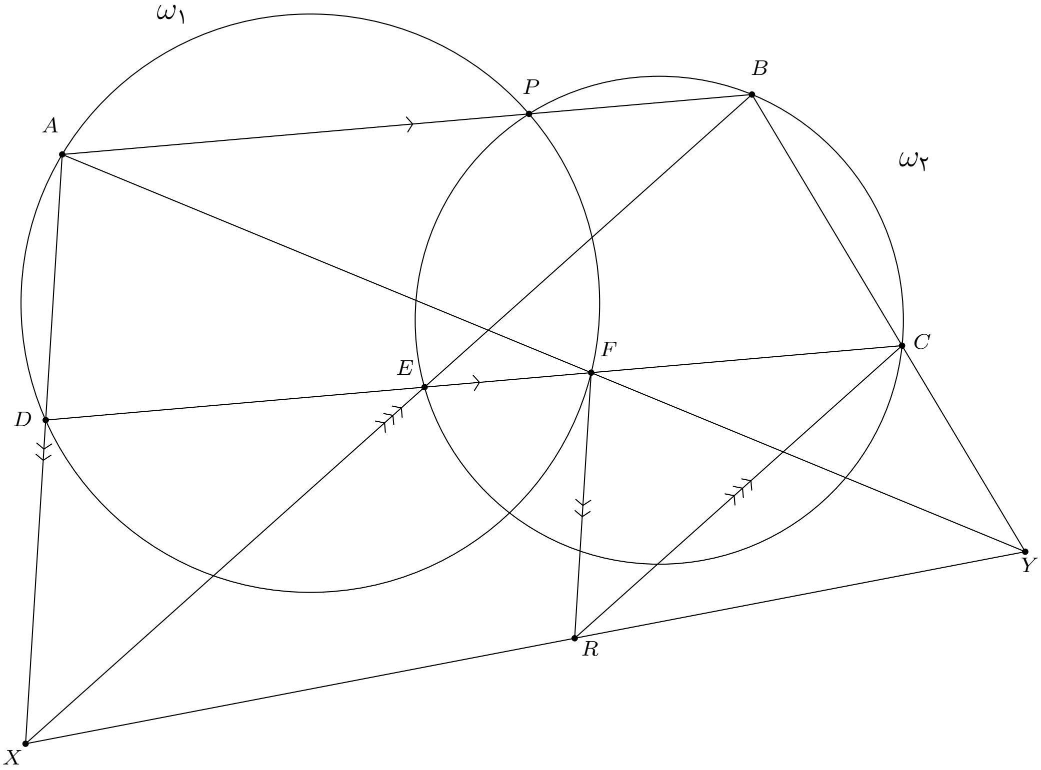
هم‌چنین طبق قضیه نیم‌ساز حکم معادل است با $\frac{PY}{PX} = \frac{RY}{RX}$ پس کافیست نشان دهیم $\frac{PF}{DX} = \frac{PY}{PX}$. ثابت می‌کنیم $\triangle YFP \sim \triangle PDX$ و از این حکم به‌دست می‌آید. دقت کنید که $\angle AFP = \angle ADP$ پس $\angle PFY = \angle PDX$ در نتیجه کافی‌است نشان دهیم

$$\frac{PD}{DX} = \frac{FY}{FP} \Longleftrightarrow \frac{AF}{FY} = \frac{DX}{AD}$$

از آن‌جا که $AF \parallel RD$ و $AD \parallel RF$ دو طرف رابطه آخر با $\frac{RX}{RY}$ برابر است و حکم این قسمت نیز ثابت می‌شود.

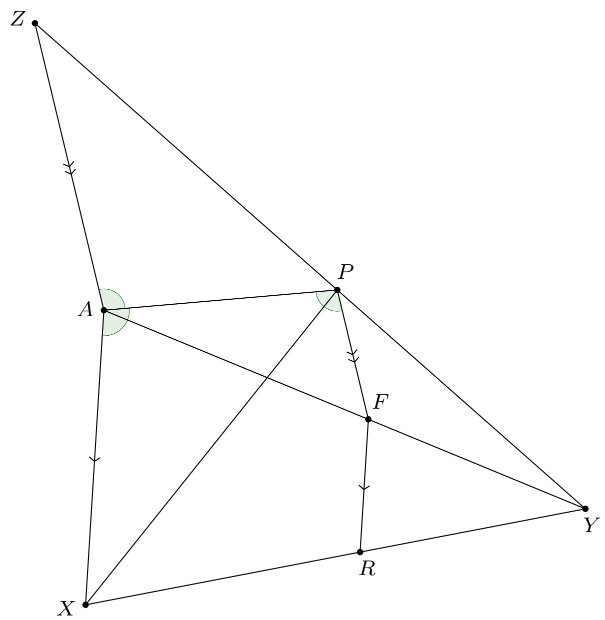
راه‌حل دوم.

الف)



دقت کنید که چهارضلعی‌های $PBCE$ و $ADFP$ ذوزنقه متساوی‌الساقین هستند در نتیجه $\angle RFD = \angle PFD = \angle ADF$ پس $AX \parallel RF$ و $\angle FCR = \angle PCF = \angle PBE$ پس $BX \parallel RC$. حالا دو مثلث RFC و XAB را در نظر بگیرید. اضلاع این دو مثلث دوبه‌دو با هم موازی‌اند پس خطوطی که رئوس متناظر را به هم متصل می‌کنند در یک نقطه همرس‌اند (به این مثلث‌ها اصطلاحاً مثلث‌های متجانس می‌گوییم و این حکم نیز با قضیه تالس به‌راحتی اثبات می‌شود) یعنی خطوط BC و AF و XR همرس‌اند که همان حکم سوال است.

ب)



از نقطه A خطی موازی با PF رسم می‌کنیم تا PY را در Z قطع کند. طبق قضیه تالس داریم

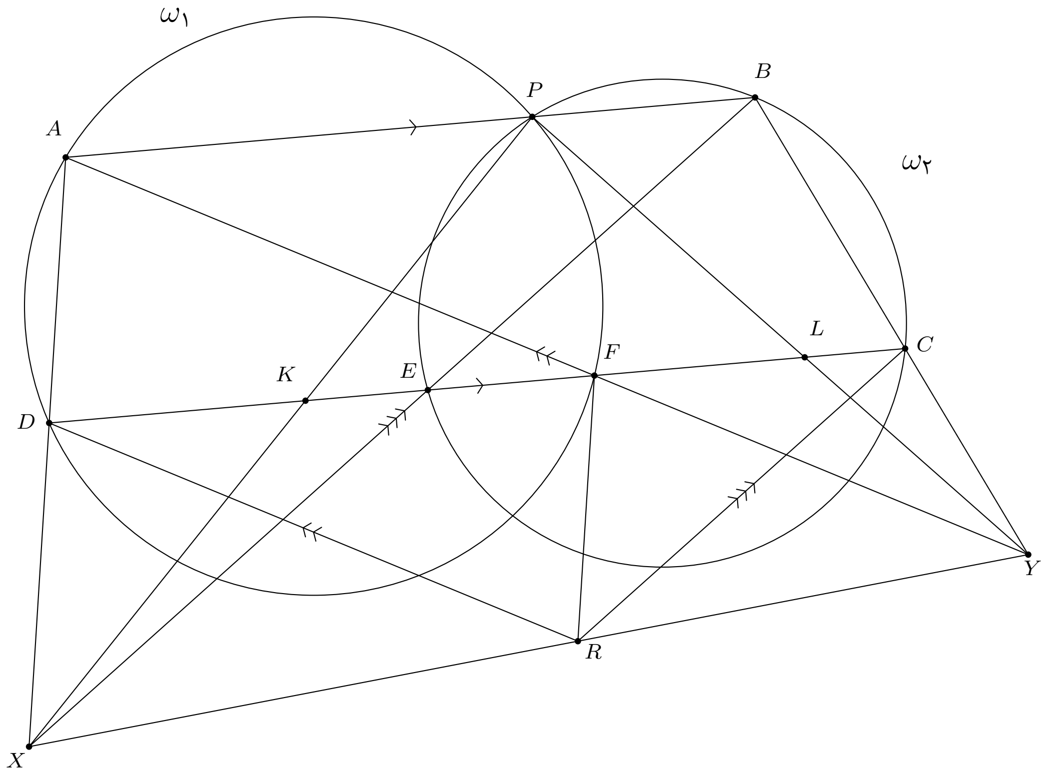
$$\frac{PF}{AZ} = \frac{YF}{YA} = \frac{FR}{AX}$$

پس از آن‌جا که $PF = FR$ نتیجه می‌شود $AX = AZ$. از طرف دیگر دقت کنید که $\angle ZAP = \angle FPA = \angle XAP$ پس دو مثلث ZAP و XAP به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت می‌شوند که نتیجه می‌دهد $ZP = PX$. در نهایت طبق قضیه تالس به‌دست می‌آید

$$\frac{PY}{PX} = \frac{PY}{PZ} = \frac{FY}{FA} = \frac{RY}{RX}$$

و حکم طبق قضیه نیم‌ساز نتیجه می‌شود.

راه‌حل سوم.

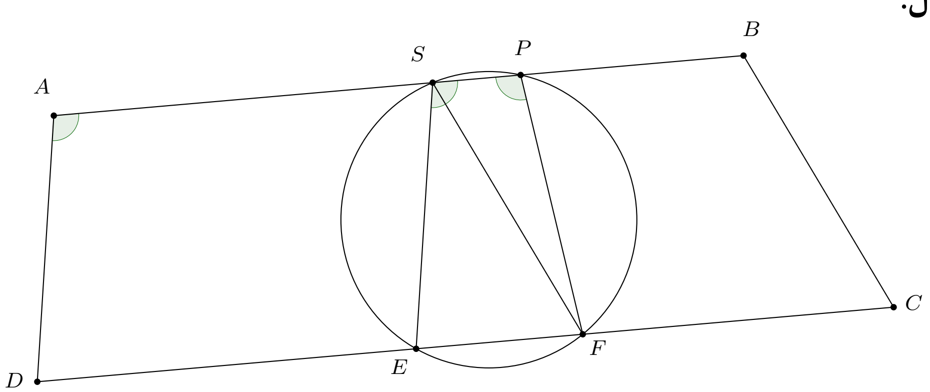


الف) مشابه راه‌حل دوم می‌توان ثابت کرد $BX \parallel RC$ و $AY \parallel RD$. حالا از C موازی با BX رسم می‌کنیم تا XY را در R' قطع کند. اگر نشان دهیم $R'D \parallel AY$ نتیجه می‌شود R' همان R است و حکم این قسمت ثابت می‌شود. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{R'Y}{YX} = \frac{YC}{YB} = \frac{CF}{AB} \qquad (۱)$$

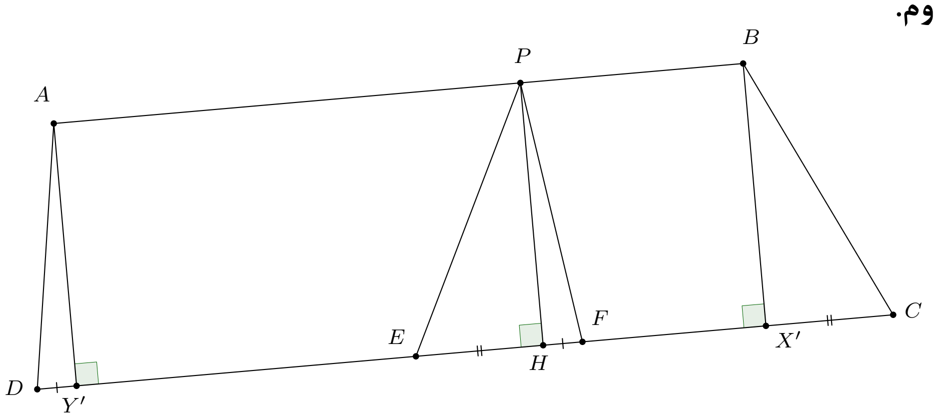
و طبق عکس قضیه تالس باید نشان دهیم $\frac{R'X}{XY} = \frac{XD}{AX}$ یا معادلاً $\frac{R'X}{XY} = \frac{DE}{AB}$ پس طبق رابطه (۱) حکم معادل است با $DE + CF = AB$. این حکم معادل را به دو روش نشان می‌دهیم:

روش اول.



محل برخورد دوم دایره محیطی مثلث PEF با AB را S می‌نامیم. واضح است که چهارضلعی $SPFE$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است پس داریم $\angle DAP = \angle FPA = \angle PSE$ در نتیجه $SE \parallel AD$ از این هم به‌دست می‌آید چهارضلعی $ASED$ متوازی‌الاضلاع است و $AS = DE$. مشابهاً ثابت می‌شود $BS = CF$ و حکم معادل ثابت می‌شود.

روش دوم.



از نقاط A، B و P بر CD عمود می‌کنیم و پای عمودها را به ترتیب Y'، X' و H می‌نامیم. می‌دانیم که $PF = AD$ و $PH = AY'$ پس دو مثلث PHF و $AY'D$ هم‌نهشتند که نتیجه می‌دهد $DY' = HF$ و مشابهاً $CX' = HE$. حالا داریم

$$DE + CF = DY' + Y'E + CX' + X'F = HF + Y'E + HE + X'F = X'Y'$$

هم‌چنین $ABX'Y'$ مستطیل است پس $X'Y' = AB$ و حکم معادل به‌دست می‌آید.

ب) محل برخورد PX و PY با CD را به ترتیب K و L می‌نامیم. کافیست نشان دهیم مثلث KPL متساوی‌الساقین است. این حکم را به دو روش نشان می‌دهیم:

روش اول. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{YL}{LP} = \frac{YC}{CB} = \frac{YR}{RX}$$

پس از عکس قضیه تالس به‌دست می‌آید $LR \parallel PX$ و به‌طور مشابه $KR \parallel PY$. در نتیجه چهارضلعی $PLRK$ یک متوازی‌الاضلاع است و $PK = LR = PL$.

روش دوم. نشان می‌دهیم $KH = LH$ و از این حکم سوال به‌دست می‌آید. طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{KE}{ED} = \frac{PB}{AB} \Longrightarrow KE = \frac{ED \cdot PB}{AB} \tag{۲}$$

هم‌چنین

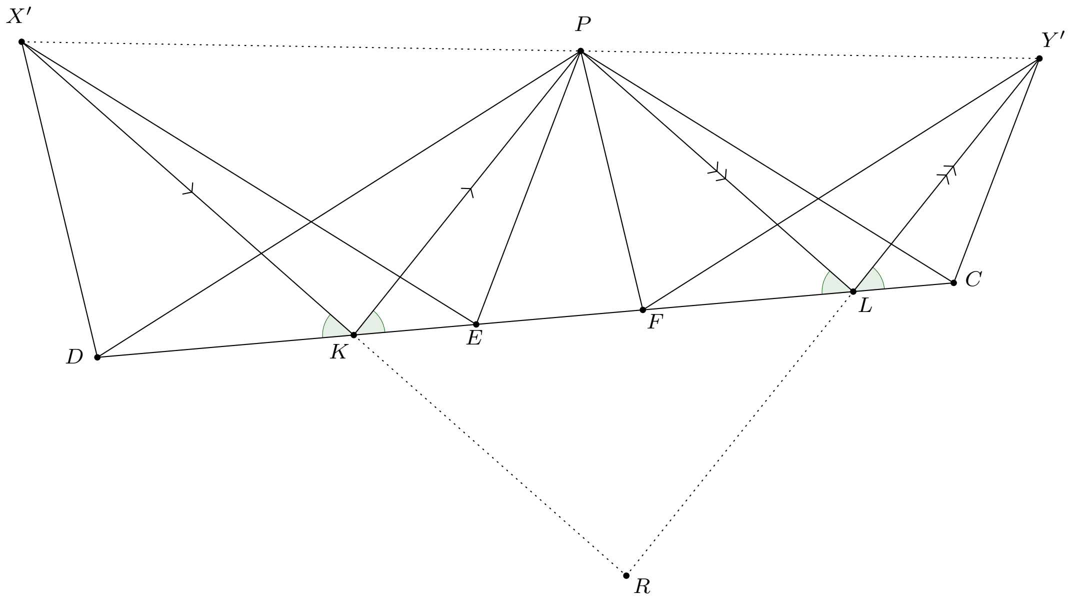
$$ED = DY' + Y'E = HF + Y'E = Y'F - EH = AP + HF - EH \tag{۳}$$

حالا با استفاده از روابط (۲) و (۳) طول KH را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} KH = KE + EH \overset{(۲)}{=} \frac{ED \cdot PB}{AB} + EH &\overset{(۳)}{=} \frac{AP \cdot BP + HF \cdot BP - EH \cdot BP + EH \cdot AB}{AB} \\ &= \frac{AP \cdot BP + HF \cdot BP + HE \cdot AP}{AB} \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توانیم طول LH را محاسبه کنیم و به‌راحتی می‌توان دید $KH = LH$.

راه‌حل چهارم.



الف) قرینه X و Y نسبت به CD را به ترتیب X' و Y' می‌نامیم. حکم سوال معادل با هم‌خطی X', P, Y' می‌شود. دقت کنید از آن‌جا که $\angle XDF + \angle PFD = ۱۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود $X'D \parallel PF$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $X'E \parallel PC$، $Y'F \parallel PD$ و $Y'C \parallel PE$ همچنین $DE \parallel CF$ در نتیجه دو چهارضلعی $X'DEP$ و $PFCY'$ با هم متجانس‌اند پس $X'P \parallel PY'$ که هم‌خطی X', P, Y' را نتیجه می‌دهد.

ب) از نقطه X' پرتویی به خط CD می‌تابانیم که بازتاب آن از P بگذرد هم‌چنین پرتوی دیگری از نقطه P و با همان زاویه به خط CD می‌تابانیم طبق تجانسی که بیان کردیم بازتاب این پرتو از Y' می‌گذرد. محل برخورد این دو پرتو با CD را به ترتیب K و L می‌نامیم. دقت کنید که $\angle RKL = \angle PKL = \angle X'KD$ پس $X'K$ از R می‌گذرد و به‌طور مشابه $Y'L$ نیز از R می‌گذرد. حالا واضح است که چهارضلعی $PKRL$ یک لوزی است پس نیم‌ساز زاویه $\angle KRL$ که همان نیم‌ساز زاویه $\angle X'RY'$ است از P می‌گذرد و این معادل حکم سوال است.

نکته. تمام قضایایی که با استفاده از تجانس در راه‌حل بیان شده با تشابه مثلث‌ها به‌راحتی قابل اثبات است.