



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد


ریاضی کشور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

هزارگان	صدگان	دهگان	یکان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	●
۶	●	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	●	۹

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف‌نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

ضمناً امسال در انتهای برخی از سوالات کوتاه‌پاسخ بخشی

به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده‌است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی بوده و به‌روند حل هیچ کمکی نخواهد کرد.

•• (سؤال شماره صفر!) کد دفترچه شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخ‌نامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ‌نامه توضیح داده شده‌است.

۱. دامنه تابع زیر، شامل چند عدد صحیح است؟

$$f(x) = \sqrt[4]{-1 + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{12}{x^2 - 2x}}}}$$

محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

۲. ۱۳۹۷ عدد حقیقی داریم که تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند. اگر تعداد اعداد گویا بین این ۱۳۹۷ عدد را n بنامیم، تعداد مقادیر ممکن برای n چند حالت مختلف دارد؟

۳. مجموع ارقام عدد $\overbrace{۹۹\dots۹}^{۹۷} \times \overbrace{۶۶\dots۶}^{۹۷}$ چند است؟ (رقم دهگان جواب برابر با ۷ است.)

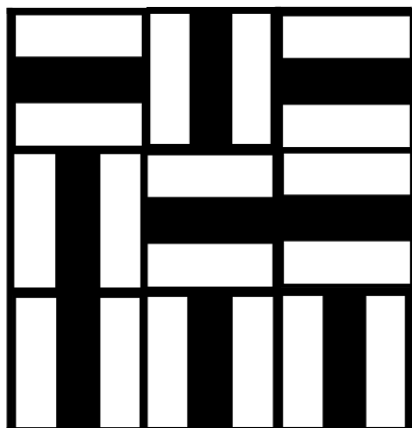
۴. می‌خواهیم یک جدول ۳×۳ را به کمک دو نوع کاشی زیر، کاشی کاری کنیم. به طوری که یک مسیر سیاه از یک ضلع جدول به ضلع مقابل آن پدید نیاید. چند حالت کاشی کاری مطلوب داریم؟



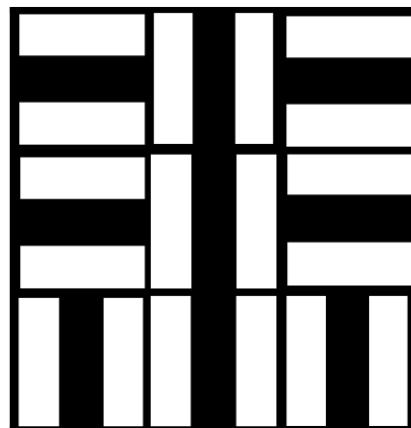
کاشی شماره ۲



کاشی شماره ۱



کاشی کاری مطلوب



کاشی کاری نامطلوب

۵۱۲ (۵)

۳۴۳ (۴)

۱۶۹ (۳)

۱۷۴ (۲)

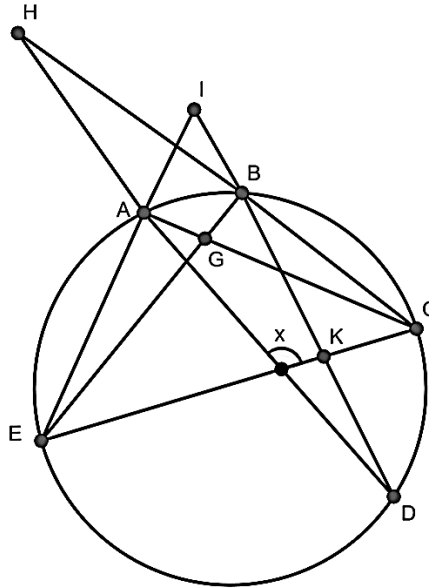
۳۳۸ (۱)

محل انجام محاسبات:

😊
 آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد
 ریاضی کشور

۵. چند عدد طبیعی دورقمی داریم که رقم صفر نداشته باشد و بر هر دو رقم خود بخش پذیر باشد؟

۶. در شکل زیر محل تلاقی EB با AC را G می نامیم. زاویه بین تلاقی امتداد پاره خطهای BD و AE برابر 70° درجه و زاویه بین تلاقی امتداد پاره خطهای DA و CB برابر با 10° درجه است. اگر زوایای \widehat{AGB} و \widehat{BKE} به ترتیب برابر 95° و 70° درجه باشند، مقدار x را بیابید. (شکل دقیق نمی باشد).



۷. در چند جایگشت a_1, a_2, \dots, a_{13} از اعداد ۱ تا ۱۳، شرایط زیر برقرار است؟ (🔔) جواب مربع کامل است.)

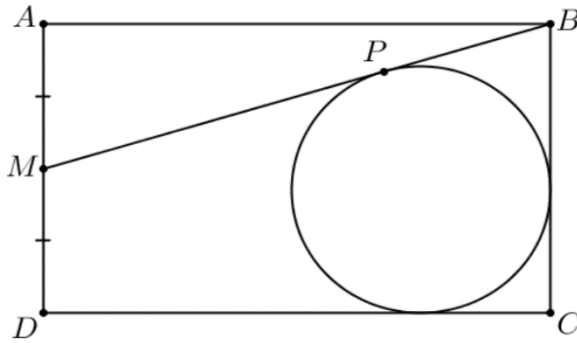
$$\begin{aligned}
 a_1, a_2 &< a_3 \\
 a_4, a_5 &< a_6 \\
 a_3, a_6 &< a_7 \\
 a_7 &< a_8, a_9 \\
 a_8 &< a_{10}, a_{11} \\
 a_9 &< a_{12}, a_{13}
 \end{aligned}$$

محل انجام محاسبات:

☺
 آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد
 ریاضی کشور

۱۴. اگر $S(n)$ مجموع ارقام عدد n و $P(n)$ حاصل ضرب ارقام n باشد، چند عدد طبیعی مختلف n می توان یافت به طوری که:

$$S(n) + P(n) = n$$



۱۵. در مستطیل شکل روبه‌رو، M وسط ضلع AD است. دایره‌ای داخل مستطیل در نظر بگیرید به طوری که بر پاره‌های BC ، DC و MB مماس باشد و محل تماس آن با پاره‌خط MB را P بنامید. اگر $MP = AD$ باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟ (شکل دقیق نمی‌باشد.)

- ۳ (۵)
 $\frac{5}{2}$ (۴)
 $\frac{3}{2}$ (۳)
۲ (۲)
 $\frac{5}{4}$ (۱)



۱۶. در یک عملیات امنیتی، ۵ نفر دستگیر شده‌اند. تعدادی از آن‌ها مجرم و تعدادی بی‌گناه‌اند. می‌دانیم افراد مجرم همواره دروغ گفته و افراد بی‌گناه همواره راست می‌گویند. اگر این ۵ نفر جملات زیر را گفته باشند دقیقاً چند مجرم داریم؟

- نفر اول: حداقل دو نفر از ما بی‌گناه است.
- نفر دوم: حداقل دو نفر از ما مجرم است.
- نفر سوم: همه بی‌گناه هستند.
- نفر چهارم: دقیقاً یک نفر از ما مجرم است.
- نفر پنجم: دقیقاً یک نفر از ما بی‌گناه است.

- ۵ (۵)
۴ (۴)
۳ (۳)
۲ (۲)
۱ (۱)

محل انجام محاسبات:

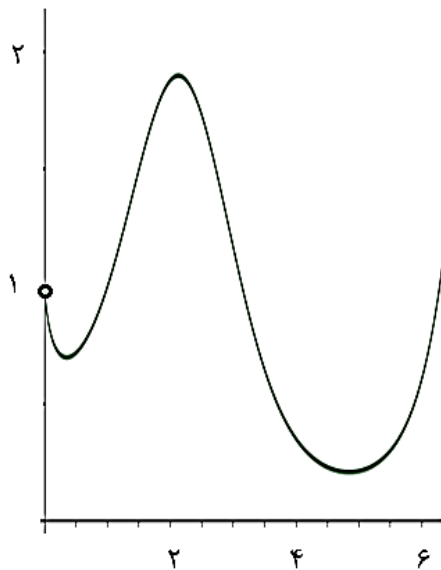


آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

۱۷. شکل روبه‌رو مربوط به بخشی از نمودار

کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



(۲) $(\cos(x))^x$

(۱) x^x

(۴) $(\sin(x))^{\sin x}$

(۳) $(\sin(x))^x$

(۵) $x^{\sin(x)}$

۱۸. در مثلث قائم الزاویه ABC ، زاویه B قائمه بوده و نقاط M و N به ترتیب بر روی پاره‌خط‌های AC و AB به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که AC بر MN عمود باشد. محل تلاقی امتداد MN با امتداد ضلع BC را P می‌نامیم. می‌دانیم که PN برابر MN است. فرض کنید O وسط ضلع AC باشد. اگر طول MN و ON به ترتیب برابر 20 و 21 سانتی‌متر باشد، طول وتر مثلث قائم الزاویه ABC را بیابید. (جواب سوال عدد طبیعی است.)

۱۹. چند دنباله از اعداد طبیعی مانند $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وجود دارد به طوری که دارای هر دو ویژگی زیر باشد؟

- $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$

- $a_3 = 54000$

محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

۲۰. در کلاس ترکیبیات، آوا همه زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه $\{1, 2, \dots, 1397\}$ را بر روی تخته نوشت. وی در ادامه به جای هر زیرمجموعه میانگین اعضای آن را قرار می‌دهد. میانگین اعداد نوشته شده بر روی تخته چند است؟

۲۱. چند زوج مرتب حقیقی (a, b) وجود دارد به طوری که:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 2(a-b) \\ 3(a-b)^2 = 4ab \end{cases}$$

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت

۲۲. درون مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB = AC)$ نقطه P مفروض است. پای عمودهای P بر اضلاع AB ، AC و BC را به ترتیب X ، Y و Z می‌نامیم. می‌دانیم مقدار زاویه \widehat{BAC} و \widehat{XZY} به ترتیب 40° و 70° درجه می‌باشند. اگر $PX = 2PY = 4PZ$ باشد، طول PZ چقدر است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{6}$ (۵) $2\sqrt{2}$

۲۳. دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شکرستان تعدادی استاد دارد که به ترتیب حروف الفبا به آن‌ها شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ... داده شده است. رئیس دانشکده از اساتید خواسته که برای خود کدی شامل چهار عدد اول درست کنند. استاد شماره n باید اعداد $n+1$ ، $n+2$ ، $n+3$ و $n+4$ را در نظر گرفته و سپس به جای هریک از این چهار عدد، یکی از عوامل اول آن را به دلخواه بنویسد. برای مثال اگر شماره استادی ۵۳ باشد، باید اعداد ۵۴، ۵۵، ۵۶ و ۵۷ را در نظر گرفته و می‌تواند این کد را انتخاب کند: ۳، ۵، ۷ و ۳ (او انتخاب‌های دیگری نیز دارد). می‌دانیم که اساتید به هر شکلی که کد خود را انتخاب کنند، کد هیچ دو استادی برابر نخواهد شد. این دانشکده حداکثر چند استاد دارد؟

محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

۲۴. برای اعداد حقیقی a و b می‌دانیم $a \in [0, 3]$ و $b \in [1, 2]$. حداقل و حداکثر مقدار عبارت $a^2 - ab + b^2$ را به ترتیب، m و M می‌نامیم. مقدار جزء صحیح $[4(M - m)]$ چند خواهد بود؟

۲۵. چند تابع صعودی $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ داریم، به طوری که برای هر $1 \leq i \leq 6$ داشته باشیم:

$$|f(i) - i| \leq 1$$

۱۲۸ (۵)

۳۲۴ (۴)

۸۹ (۳)

۱۶۴ (۲)

۱۴۴ (۱)