۱- فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه A، B و $A \cup B$ در یک دسته باشند آن‌گاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

۲- اعداد حقیقی و مثبت x، y و z با شرط $x + y + z = ۱۳۹۹$ مفروض‌اند. بیش‌ترین مقدار عبارت

$$[x]\, y + [y]z + [z]x$$

چه‌قدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست.)

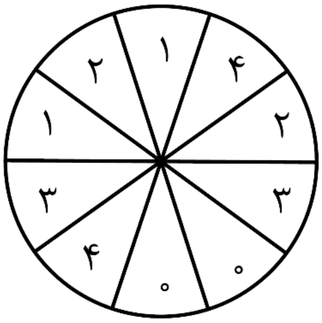
۳- دایرهٔ ω_1 به مرکز O_1 مفروض است. دایرهٔ ω_2 به مرکز O_2 از نقطهٔ O_1 می‌گذرد و ω_1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر ω_1 مماس است را l می‌نامیم. دایره‌ای که از O_1 و O_2 می‌گذرد و مرکز آن روی l قرار دارد، ω_2 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینهٔ P نسبت به l روی ω_1 قرار دارد.

۴- دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B تقاطع دارند. نقطهٔ X روی $\omega_۱$ و نقطهٔ Y روی $\omega_۲$ قرار دارند به طوری‌که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. قرینهٔ B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D می‌نامیم. ثابت کنید

$$\angle CAD < ۹۰^\circ$$

۵- دوتایی (a, b) از اعداد طبیعی را *مربع‌ساز* گوییم هرگاه $ab + ۱$ مربع کامل باشد. تمام nهای طبیعی را بیابید که مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ را بتوان به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

۶- دایره‌ای را به $2n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد ۰، ۱، ...، $n-1$ را بنویسیم به طوری‌که



1. هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.
2. برای هر عدد طبیعی i که $0 \le i \le n-1$، بین هر دو قطاع با شمارهٔ i، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

در شکل روبه‌رو این کار برای $n = 5$ انجام شده است.

ثابت کنید برای $n = 1399$ این کار امکان‌پذیر نیست.