



آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

دانش آموز عزیز، سؤال های این آزمون به دو شکل پنج گزینه ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج گزینه ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ غلط به سؤال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ نامه در مورد هر دو نوع سؤال، مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

سؤال ۱			
یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	●	۶	●
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	●	۹

جواب سؤال های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کم تر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود، شما باید از قسمت اعشاری صرف نظر کرده و در پاسخ نامه، مانند شکل روبه رو، رقم های مربوطه را سیاه کنید.

در مورد سؤال های پنج گزینه ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سوالات پاسخ کوتاه بخشی

به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.

۱. دو عدد طبیعی را زوج خوش بخت گوئیم هرگاه تعداد ارقام آن ها برابر و ترتیب ارقام آن ها کاملاً عکس یکدیگر باشد (مثلاً ۲۳۱ و ۱۳۲ زوج خوش بخت است). چند زوج خوش بخت سه رقمی وجود دارد که اختلاف آن ها ۷ برابر عددی طبیعی است؟

: باقیمانده تقسیم جواب بر ۸ برابر ۴ است.

۲. معادله زیر چند جواب در اعداد حقیقی مثبت دارد؟

$$x^{[x]} = x + [x]$$

توضیح: منظور از $[x]$ جزء صحیح عدد x است.

: جواب عددی فرد است.



آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

۳. در مستطیل $ABCD$ می‌دانیم $AB = 3$ و $BC = 2$ است. دایره‌ای به اضلاع AB ، BC و CD مماس است. از نقطه D مماسی غیر از ضلع CD بر دایره رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه P قطع کند. طول DP کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $1 + \sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{10} - 1$ (۵) $\frac{5}{2}$

۴. خانه‌های یک جدول 6×6 همانند شکل زیر با ۴ رنگ رنگامیزی شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۶ خانه از این جدول را انتخاب کرد بطوری که ۳ تا از آن‌ها از یک رنگ و ۳ تا از رنگ دیگری باشند و در ضمن هیچ دوتا در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند؟

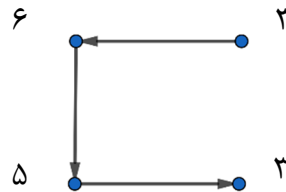
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴
۱	۲	۱	۲	۱	۲
۳	۴	۳	۴	۳	۴



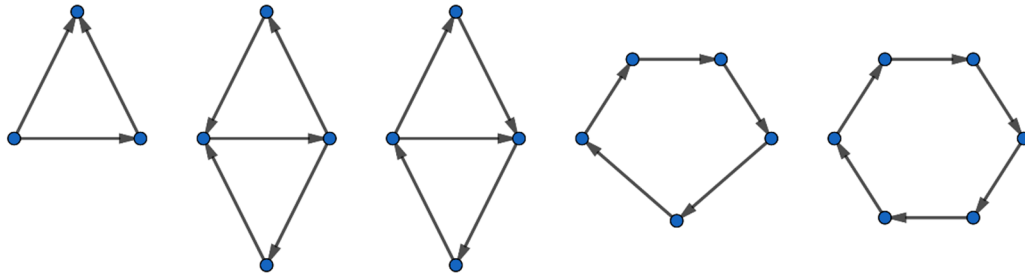
آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

۵. می‌خواهیم برای اشکالی مانند شکل زیر، روی هر یک از رئوس شکل، اعدادی بین $۱, ۲, \dots, ۶$ را بنویسیم طوری که برای هر پیکان که از رأس با عدد x خارج و به رأس با عدد y وارد شده باشد، $۵x + y$ مضرب ۷ باشد. مانند اعدادی که روی رئوس شکل زیر است:



مثلا در بالاترین پیکان $۲۱ = ۵ \times ۳ + ۶$ مضرب ۷ است. در چند شکل از اشکال زیر می‌توان این کار را انجام داد؟



۶. چند چهارتایی مرتب (a, b, c, d) از اعداد صحیح در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند؟

$$a + b = c^2 + d^2, c + d = a^2 + b^2$$

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰ (۵) بی‌نهایت

۷. مساحت چندضلعی‌ای که طول همه اضلاع آن برابر یک سانتی‌متر است و زوایای داخلی آن به صورت یکی در میان برابر ۹۰ و ۲۲۵ درجه است، چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) $۱ + ۲\sqrt{۲}$ (۲) $۶ + ۴\sqrt{۲}$ (۳) $۸ + ۴\sqrt{۲}$ (۴) $۶ + ۶\sqrt{۲}$ (۵) ۱۶



آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

ریاضی کشور



۸. در یک کیسه ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی وجود دارد. مهدیار در ابتدا با یک چشم‌بند، چشم‌های خود را به‌طور کامل می‌بندد. سپس در گام اول یکی از توپ‌ها را از کیسه به بیرون می‌اندازد. در گام دوم ۵ توپ را از کیسه خارج کرده و به کیسه دوم منتقل می‌کند. در گام سوم یک توپ را از کیسه دوم به بیرون می‌اندازد. در گام چهارم از کیسه دوم ۲ توپ خارج کرده و به کیسه سوم منتقل می‌کند. سپس یک توپ را از کیسه سوم خارج می‌کند. احتمال اینکه توپ خارج شده قرمز باشد، کدام است؟

$$\frac{4}{5} \text{ (۵)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (۱)}$$

۹. مجموع ارقام یک عدد طبیعی برابر ۱۸ است. کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد باشد؟

$$۳۶ \text{ (۵)}$$

$$۲۴ \text{ (۴)}$$

$$۸ \text{ (۳)}$$

$$۶ \text{ (۲)}$$

$$۵ \text{ (۱)}$$

۱۰. علی و رضا هر کدام یک دنباله حسابی ۳ جمله‌ای از اعداد حقیقی و مثبت انتخاب کرده و روی برگه خود، از چپ به راست می‌نویسند. سپس هر دو برگه‌ها را کنار هم قرار داده و جملات دنباله‌ها را نظیر به نظیر باهم مقایسه می‌کنند و نتیجه را به صورت دنباله‌ای از حروف "ب"، "ک" و "م" روی تخته، از چپ به راست می‌نویسند. اینگونه که اگر جمله i ام دنباله علی از جمله i ام دنباله رضا بزرگتر بود حرف "ب"، اگر کوچکتر بود حرف "ک" و اگر مساوی بود حرف "م" را به عنوان جمله i ام دنباله نتیجه، روی تخته می‌نویسند. به عنوان مثال اگر دنباله علی ۲۳۴ و دنباله رضا ۱۴۷ باشد، دنباله نتیجه ک ک ب خواهد بود. چه تعداد از دنباله‌های حروف زیر نمی‌تواند به عنوان نتیجه روی تخته نوشته شده باشد؟

ک م ب

م ب م

ک ک م

ب ک م

ب ب ک

ک ب ب

ک م ک

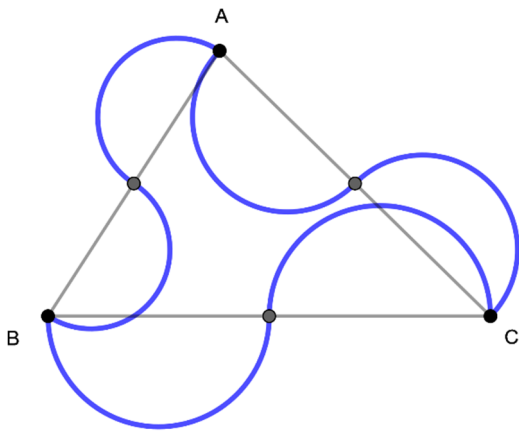
م ب ک

کد سؤالات: ۱



آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

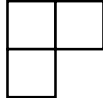
ریاضی کشور



۱۱. می‌خواهیم مساحت برکه دوستی را محاسبه کنیم. محیط برکه دوستی، مانند شکل، از شش نیم‌دایره تشکیل شده که از رئوس و اواسط اضلاع مثلث ABC عبور می‌کند. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵۰، ۶۰ و ۷۰ متر باشد، مساحت برکه دوستی چند متر مربع است؟

- (۱) ۱۵۰۰ (۲) ۳۰۰۰ (۳) $۳۰۰\sqrt{۶}$ (۴) $۶۰۰\sqrt{۶}$ (۵) ۳۶۰π

۱۲. به چند طریق می‌توان ۶ خانه از یک جدول ۳×۵ را حذف کرد بطوری که در خانه‌های باقیمانده

شکلی مانند  و دوران‌های آن، یافت نشود؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰ (۵) ۲۲

۱۳. n عددی طبیعی است. می‌دانیم n دارای حداقل سه مقسوم‌علیه مثبت است و همچنین اگر $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ مقسوم‌علیه‌های آن باشند، داریم $d_{k-1} - d_{k-2} = ۱۳۹۹$. بزرگترین مقدار ممکن برای n چند است؟

📢: رقم دهگان جواب برابر ۹ است.

۱۴. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند؟

$$\begin{cases} 2y^2 + 2y + 4x = x^2 + xy + 4 \\ y^2 + 2x^2 + 2y = 5x + 3xy + 3 \end{cases}$$



آزمون مرحله اول سی و نهمین المپیاد

ریاضی کشور

۱۵. دایره W_1 به مرکز O و شعاع ۴ سانتی‌متر بر دایره W_2 در نقطه S مماس داخل است. وتر AB از دایره W_2 در نقطه M بر W_1 مماس است. می‌دانیم مثلث OAB متساوی‌الساقین است. اگر زاویه AOB برابر 120° درجه باشد، شعاع دایره W_2 چند سانتی‌متر است؟

🔔 : جواب عددی طبیعی است.

۱۶. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه ۱۰ عضوی از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ انتخاب کنیم بگونه‌ای که بتوانیم با شروع از این مجموعه‌های انتخاب شده و اعمال اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها به هر زیرمجموعه دلخواه از S برسیم. حداقل چند زیرمجموعه باید انتخاب کنیم؟

🔔 : جواب مضرب ۴ است.

سجاد آذین‌پاشیده